

Die Übergangsimpedanz einer kapazitiv angekoppelten Elektrode

Andreas Hördt, Peter Weidelt, Anita Przyklenk
Institut für Geophysik und extraterrestrische Physik, TU Braunschweig

Vorwort von A. Hördt

Die in diesem Artikel vorgestellte Theorie beruht auf einer unveröffentlichten Arbeit von Prof. Peter Weidelt, der am 1.7.2009 unerwartet verstorben ist. Die Arbeit ist ein typisches Beispiel für seine außerordentliche Hilfsbereitschaft, für die er unter Kollegen in aller Welt bekannt war. Im Jahr 2007 hatte ich ihn um Unterstützung bei der Berechnung der Übergangsimpedanz einer kapazitiven Elektrode gebeten. Einige Wochen später hatte er die vollständige Lösung hergeleitet und in ein Programm umgesetzt. Er selbst hat die Aufgabe als nicht allzu schwierig oder wichtig empfunden, und hätte die Ergebnisse vermutlich nie veröffentlicht.

1 Zusammenfassung

Es wird eine Möglichkeit vorgestellt, die Impedanz einer Kreisscheibe zu berechnen, die an einen Halbraum mit endlicher Leitfähigkeit angekoppelt ist. Basierend auf den Maxwellgleichungen wird eine Integralgleichung für die Ladungsdichte q auf der Kreisscheibe aufgestellt. Mit der Randbedingung, dass das Potential auf der Scheibe konstant ist, kann die Ladungsdichte q der zu angehobener Platte stetig $q(r)$ und damit die Gesamtladung bestimmt werden. Es zeigt sich, dass der Übergang von aufliegender Funktion des Abstandes verläuft. Zudem nimmt die Impedanz als Funktion des Abstandes $Z(r)$ zu, d.h. die Ankopplung einer kapazitiv angekoppelten Elektrode kann niemals geringer sein, als die einer aufliegenden mit gleicher Fläche. Je nach Modellparametern kann die Impedanz jedoch innerhalb weniger Nanometer über Größenordnungen variieren, so dass es dennoch günstig sein kann, die Elektrode zu isolieren, um starke Schwankungen der Impedanz zu vermeiden.

2 Einleitung

Bei geoelektrischen Messungen über sehr schlecht leitendem Untergrund kann es von Vorteil sein, den Strom kapazitiv anzukoppeln (Kuras et al., 2006). Dabei wird ein hochfrequentes Wechselfeld an eine Elektrode angelegt, die keinen direkten Kontakt mit dem Untergrund hat. Eine genaue Berechnung der Übergangsimpedanz einer solchen Elektrode ist notwendig, um zu beurteilen, unter welchen Bedingungen eine kapazitive Ankopplung einer galvanischen überlegen ist. Für die praktische Umsetzung ist die Frage von Bedeutung, ob es günstig ist, eine kapazitive Elektrode zu isolieren und einen galvanischen Kontakt auszuschließen. Die Standardformeln für die Ankopplung kapazitiver Elektroden sind allerdings nur für hohe Leitfähigkeiten des Untergrundes gültig. Hördt (2007) hat analytische Gleichungen für eine Kugelelektrode im sphärisch geschichteten Vollraum hergeleitet und diskutiert. Hier wird nun eine Lösung für eine zylindrische Scheibe über einem Halbraum hergeleitet.

3 Modellbeschreibung

Abbildung 1 illustriert das zu lösende Problem. Zu berechnen ist, welcher Strom I bei einer vorgegebenen Spannung U zwischen zwei zylindrischen Scheiben über einem homogenen Halbraum fließt.

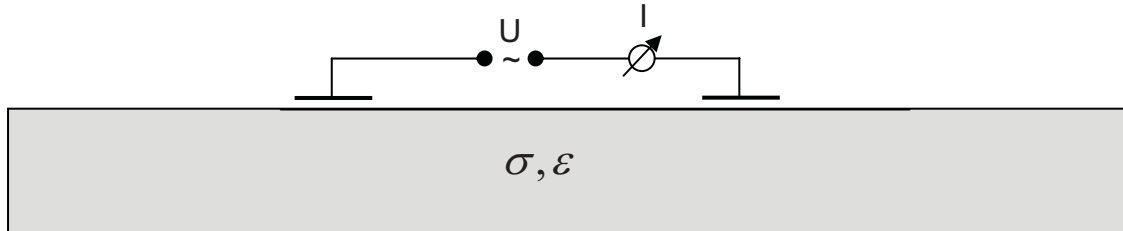


Abbildung 1: Skizze der kapazitiv angekoppelten Stromquelle: Zwei zylindrische Scheiben sind kapazitiv an einen homogenen Halbraum mit Leitfähigkeit σ und Permittivität ϵ angekoppelt, es fließt ein Strom I bei vorgegebener Spannung U .

Wenn der Untergrund ein idealer Leiter ist, gilt bei kleinem Abstand zwischen Elektrode und Untergrund für die komplexe Übergangsimpedanz (Smythe, 1968):

$$Z = \frac{1}{i\omega C} \quad (1)$$

wobei ω die Kreisfrequenz ist und C die Kapazität, mit

$$C = \frac{A\epsilon_0}{d} \quad (2)$$

Dabei ist A die Fläche der Elektrode, d der Abstand zum Untergrund, und ϵ_0 die Dielektrizitätszahl des Vakuums zwischen den Elektroden. diese Formeln stellen allerdings eine Näherung für einen idealen Leiter dar. Je nach Frequenz und Leitfähigkeit gilt die Näherung nicht mehr, und die elektrischen Parameter des Untergrundes müssen explizit berücksichtigt werden. Dies erfordert eine vollständige Lösung der Maxwellgleichungen.

Die geometrischen Parameter des Modelles sind in Abbildung 2 illustriert. Die ideal leitende Kreisscheibe mit Radius a befindet sich im Abstand d über dem Untergrund. Der Mittelpunkt der Scheibe ist der Ursprung des zylindrischen Koordinatensystemes. Es wird angenommen, dass alle zeitlichen Variationen harmonisch sind, die zeitliche Abhängigkeit sich also durch $e^{i\omega t}$ darstellen lässt. Die Leitfähigkeit des Untergrundes lässt sich dann als komplexe Größe darstellen: $\bar{\sigma}_1 = \sigma_1 + i\omega\epsilon_1$, wobei σ_1 die Gleichstromleitfähigkeit ist. Das Medium zwischen Untergrund und Scheibe hat die rein imaginäre Leitfähigkeit $\bar{\sigma}_0 = i\omega\epsilon_0$.

Wenn an die Scheibe ein Potential U angelegt wird, stellt sich eine radialsymmetrische Ladungsverteilung $q(r)$ ein. Die Gesamtladung Q erhält man dann aus

$$Q = 2\pi \int_0^a q(s) ds \quad (3)$$

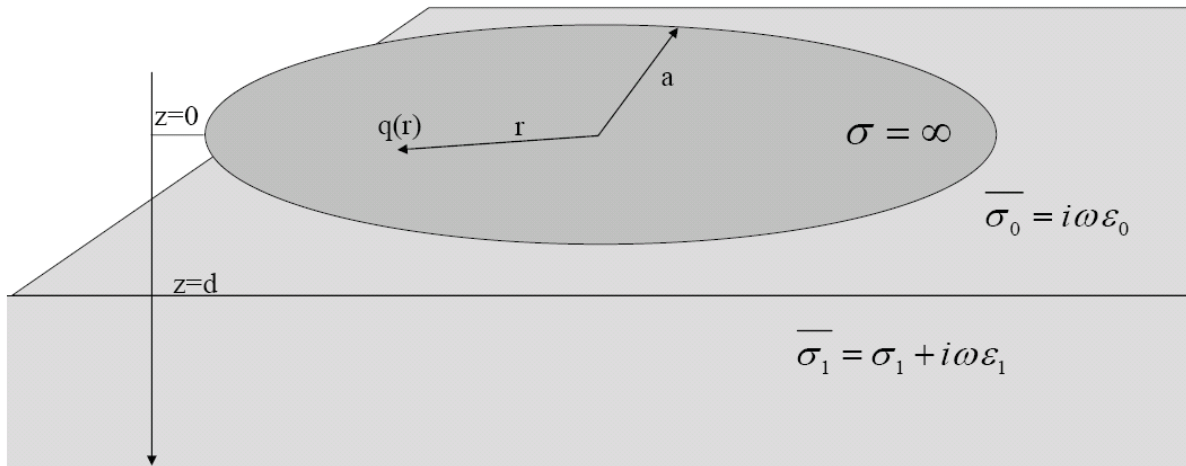


Abbildung 2: Parameter des Modelles der ideal leitenden Kreisscheibe über homogenem Halbraum.

Es muss also die Flächenladungsdichte $q(r)$ gefunden werden, aus der dann Q und mit

$$C = \frac{Q}{U} \quad (4)$$

die komplexe Kapazität, bzw. mit Gl. (1) die komplexe Impedanz der Kreisscheibe berechnet werden kann.

Aus der Forderung, dass die Leitfähigkeit auf der Scheibe unendlich ist, ergibt sich, dass das elektrische Feld auf der Scheibe verschwindet. Die Lösungsstrategie besteht darin, eine Gleichung für das elektrische Feld im gesamten Raum als Funktion von $q(r)$ zu berechnen und dann $q(r)$ so zu bestimmen, dass die Radialkomponente E_r auf der Scheibe verschwindet.

4 Theorie

4.1 Grundgleichungen

Um das elektrische Feld zu berechnen, müssen die Maxwellgleichungen in Zylinderkoordinaten gelöst werden. Aus dem Amperegesetz folgt unter der Berücksichtigung der harmonischen Zeitabhängigkeit:

$$\sigma \underline{E} + \frac{\partial \epsilon \underline{E}}{\partial t} = (\sigma + i\omega\epsilon) \underline{E} = \bar{\sigma} \underline{E} = \text{rot} \underline{H} \quad (5)$$

mit dem elektrischen Feld \underline{E} und dem Magnetfeld \underline{H} . Die Leitfähigkeit und die Dielektrizitätszahl hängen von z ab. Aus Symmetriegründen besitzt das elektrische Feld nur eine Vertikal- und eine Radialkomponente, die nur von z und r abhängen. Das Magnetfeld besitzt nur eine von r und z abhängige φ -Komponente.

Damit folgt aus Gl. (5):

$$\bar{\sigma} E_r = -\frac{\partial H_\varphi}{\partial z} \quad (6a,b)$$

$$\bar{\sigma} E_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial r}$$

Aus dem Induktionsgesetz:

$$-\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = \text{rot} \underline{E} \quad (7)$$

folgt:

$$-i\omega\mu_0 H_\varphi = \frac{\partial E_z}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial z} \quad (8)$$

Durch Einsetzen von (6a) und (6b) in (8) erhält man eine entkoppelte Gleichung für H_φ :

$$\partial_r \left(\frac{1}{r} \partial_r (rH_\varphi) \right) + \bar{\sigma} \partial_z \left(\frac{1}{\bar{\sigma}} \partial_z H_\varphi \right) = i\omega\mu_0 \bar{\sigma} H_\varphi \quad (9)$$

wobei die Schreibweise $\partial_r = \frac{\partial}{\partial r}$ angewandt wurde.

Der erste Term in Gl. 9 legt eine Trennung der Variablen mit Hilfe der Besselfunktion 1. Ordnung mit der Wellenzahl u nahe:

$$H_\varphi(r, z) = f(z, u) \cdot J_1(ur) \quad (10)$$

denn die Besselfunktion erfüllt die Bessel'sche Differentialgleichung:

$$\frac{\partial_r J_1(ur)}{r} + \partial_r^2 J_1(ur) - \frac{1}{r^2} J_1(ur) = -u^2 J_1(ur) \quad (11)$$

so dass mit (10) folgt:

$$\partial_r \left(\frac{1}{r} \partial_r (rH_\varphi) \right) = -u^2 H_\varphi \quad (12)$$

Bei dieser Strategie besteht eine Analogie zur Fouriertransformation, bei welcher z.B. eine zweifache zeitliche Ableitung nach Transformation in den Frequenzbereich mit der Funktion $e^{i\omega t}$ zu einer Multiplikation mit $-\omega^2$ führt. Entsprechend führt hier der Differentialoperator im 1. Term in Gl. (9) zu einer Multiplikation mit $-u^2$. Die Lösung von (9) lässt sich folglich darstellen als:

$$H_\varphi(r, z) = \int_0^\infty f(z, u) J_1(ur) du \quad (13)$$

Die Wahl der Besselfunktion 1. Ordnung ergibt sich daraus, dass aus Symmetriegründen H_φ bei $r=0$ verschwinden muss, was von J_1 erfüllt wird, aber nicht von J_0 . Aus dem Amperegesetz (6a und 6b) ergeben sich damit direkt die Gleichungen für die Komponenten des elektrischen Feldes:

$$E_r(r, z) = \frac{-1}{\bar{\sigma}} \int_0^{\infty} \frac{\partial f(z, u)}{\partial z} J_1(ur) du \quad (14)$$

$$E_z(r, z) = \frac{1}{\bar{\sigma}} \int_0^{\infty} u f(z, u) J_0(ur) du \quad (15)$$

Zur Bestimmung von $f(z, u)$ wird zunächst Gl. (13) herangezogen. Durch Einsetzen in (9) sieht man unter Benutzung von (12), dass die Funktion $f(z, u)$ die Gleichung

$$\bar{\sigma} \partial_z \left(\frac{1}{\bar{\sigma}} \partial_z f \right) = \alpha^2 f \quad (16)$$

erfüllen muss, mit

$$\alpha^2 = i\omega\mu_0\bar{\sigma} + u^2 \quad (17)$$

4.2 Bestimmung von $f(z, u)$

Gleichung (14) muss unter der Berücksichtigung der Randbedingungen an den Schichtgrenzen und der Quellbedingung gelöst werden. Die Quelle wird durch einen Sprung der Vertikalkomponente des elektrischen Feldes an der Scheibe beschrieben:

$$[E_z(r)]_{-}^{+} = \frac{q(r)}{\varepsilon_0} \quad (18)$$

wobei $[]_{-}^{+}$ die Differenz der Werte unmittelbar oberhalb und unterhalb der Scheibe, also den Sprung des Funktionswertes, kennzeichnet.

$$[E]_{-}^{+} = E(z = 0^+) - E(z = 0^-) \quad (18a)$$

Um aus (18) eine Bedingung für $f(r, z)$ abzuleiten, transformieren wir sie in den Wellenzahlbereich mittels Gl. (15), aus der folgt:

$$[E_z(r, z)]_{-}^{+} = \frac{1}{\bar{\sigma}} \int_0^{\infty} u [f(z, u)]_{-}^{+} J_0(ur) du = \begin{cases} \frac{q(r)}{\varepsilon_0}, & 0 \leq r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases} \quad (19)$$

Die Ladungsdichte $q(r)$ lässt sich mittels der Hankeltransformation in den Wellenzahlbereich transformieren:

$$\tilde{q}(u) = \int_0^{\infty} u q(r) J_0(ur) dr \quad (20)$$

Mit $\tilde{q}(u)$ als der Ladungsdichte im Wellenzahlbereich.

Dementsprechend ist $q(r)$ darstellbar als:

$$q(r) = \int_0^{\infty} u \tilde{q}(u) J_0(ur) du \quad (21)$$

Durch Einsetzen von (21) in (19) wird klar, dass

$$[f(z,u)]_+^- = \frac{\bar{\sigma}_0}{\varepsilon_0} \tilde{q}(u) \quad (22)$$

d.h. die im Raumbereich formulierte Randbedingung (18) transformiert sich gemäß (22) in den Wellenzahlbereich.

Nach der Formulierung der Randbedingungen wird nun die Differenzialgleichung für f gelöst. Aus der Form von Gleichung (16) ergibt sich direkt, dass die Lösungen Funktionen der Form $e^{\pm\alpha z}$ sind, wobei berücksichtigt werden muss, dass α im unteren Halbraum und in der Luft unterschiedlich sind. Daraus ergibt sich folgender Ansatz für die Funktion $f(z,u)$:

$$f(z,u) = \begin{cases} -Ae^{+\alpha_0 z} + Be^{+\alpha_0 z}, & z < 0 \\ +Ae^{-\alpha_0 z} + Be^{+\alpha_0 z}, & 0 < z < d \\ Ce^{-\alpha_1 z}, & z > d \end{cases} \quad (23a,b,c)$$

wobei

$$\alpha_0^2 = i\omega\mu_0\bar{\sigma}_0 + u^2 \quad \text{und} \quad \alpha_1^2 = i\omega\mu_0\bar{\sigma}_1 + u^2 \quad (24a,b)$$

die Parameter in Luft und im unteren Halbraum sind.

Die Vorzeichen der Exponenten in den Ansatzfunktionen in (23) ergeben sich jeweils aus der Forderung, dass $f(z,u)$ im Unendlichen sowohl für $z < 0$, als auch $z > 0$ verschwinden muss.

Die Randbedingungen an Schichtgrenzen ergeben sich aus den Stetigkeitsbedingungen für die elektromagnetischen Felder. Da die Horizontalkomponenten von E und H an Schichtgrenzen stetig sind, folgt mittels (13) und (14), dass f und $\frac{1}{\bar{\sigma}} \frac{\partial f}{\partial z}$ stetig sein müssen.

Damit und mit der Sprungbedingung für f (Gl. (22)) lassen sich nun die Konstanten A, B und C in Gl. (23) berechnen. Beispielsweise folgt aus (23a,b), dass

$$\begin{aligned} f(z=0)_- &= B - A \\ f(z=0)_+ &= A + B \end{aligned} \quad (25a,b)$$

und damit für den Sprung von f bei $z=0$:

$$[f(z,u)]_+^- = f(z=0^+) - f(z=0^-) = 2A \quad (26)$$

und mit (22) erhält man hieraus für A :

$$A = \frac{\bar{\sigma}_0}{2\varepsilon_0} \tilde{q}(u) \quad (27)$$

Die Bestimmung von B und C aus den Stetigkeitsbedingungen erfolgt analog, ist aber komplexer und wird hier nicht im Einzelnen ausgeführt. Man erhält folgendes Endergebnis für f :

$$f(z,u) = \frac{\bar{\sigma}_0}{2\varepsilon_0} \tilde{q}(u) \begin{cases} e^{+\alpha_0 z} + R(u)e^{\alpha_0(z-2d)}, & z < 0 \\ e^{-\alpha_0 z} + R(u)e^{\alpha_0(z-2d)}, & 0 < z < d \\ T(u)e^{-\alpha_1(z-d)}e^{-\alpha_0 d}, & z > d \end{cases} \quad (28a,b,c)$$

mit Reflektions- und Transmissionsfaktor

$$R(u) = \frac{\alpha_0(u)\bar{\sigma}_1 - \alpha_1(u)\bar{\sigma}_0}{\alpha_0(u)\bar{\sigma}_1 + \alpha_1(u)\bar{\sigma}_0} \quad (29)$$

$$T(u) = \frac{2\alpha_0(u)\bar{\sigma}_1}{\alpha_0(u)\bar{\sigma}_1 + \alpha_1(u)\bar{\sigma}_0} \quad (30)$$

Mit (28-30) und (13-15) lassen sich dann alle Feldkomponenten berechnen, wobei für die Bestimmung der Ladungsdichte nur die Gleichung für E_r im Bereich zwischen Halbraum und Scheibe benötigt wird. Im Folgenden wird die Näherung $\alpha_0 = u$ verwendet. Im Vakuum ist nämlich

$$\alpha_0^2 = u^2 + \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 = u^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \approx u^2 \quad (24c)$$

Die relevanten Wellenzahlen u ergeben sich aus der Dimension des Messsystemes, welches bei den hier berücksichtigten Frequenzen in jedem Fall klein ist gegen die elektromagnetische Wellenlänge im Vakuum. Es ist also $u \gg \omega/c$ und damit der 1. Term auf der rechten Seite vernachlässigbar.

Die Gleichung für E_r ergibt sich aus (28b) und (14), wobei die Ableitung von f nach z einen Faktor u unter dem Integral ergibt:

$$E_r(r, z) = \frac{1}{2\varepsilon_0} \int_0^\infty u \tilde{q}(u) [e^{-uz} - R(u)e^{u(z-2d)}] J_1(ur) du \quad 0 \leq z \leq d \quad (31)$$

4.3 Bestimmung der Ladungsdichteverteilung

Zur Bestimmung der Ladungsdichteverteilung wird wie oben erläutert gefordert, dass die Radialkomponente des elektrischen Feldes auf der Scheibe verschwindet. Benötigt wird also das Feld bei $z=0$:

$$E_r(r, z=0) = \frac{1}{2\varepsilon_0} \int_0^\infty u \tilde{q}(u) [1 - R(u)e^{-2ud}] J_1(ur) du \quad (32)$$

Die Idee ist nun, eine Ladungsverteilung $q(r)$ zu suchen, so dass E_r überall verschwindet. Damit lässt sich Gleichung (32) im Prinzip in ein Gleichungssystem überführen. Setzt man die Transformation der Ladungsdichte (Gl. 20) in (32) ein, so erhält man:

$$\frac{1}{2\varepsilon_0} \int_0^a \int_0^a s q(s) J_0(s) u [1 - R(u)e^{-2ud}] J_1(ur) du ds = 0 \quad (33)$$

Dabei wurde die neue Variable s eingeführt, die ebenso wie r von 0 bis a läuft, allerdings verschieden von r sein muss, da ja das elektrische Feld bei r von der gesamten Ladungsdichteverteilung abhängt. Definiert man nun die Funktion:

$$F(s, r) = \int_0^\infty u [1 - R(u)e^{-2ud}] J_0(us) J_1(ur) du \quad (34)$$

so kann man Gl. (33) schreiben als:

$$\frac{1}{2\varepsilon_0} \int_0^a s q(s) F(s, r) ds = 0 \quad (35)$$

Die Funktion $F(s,r)$ lässt sich nach Gl. (34) für jedes s und r direkt durch Integration über u berechnen. Die Scheibe wird also geeignet diskretisiert, und mit den diskreten Werten für s und r erhält man eine Matrix $\underline{\underline{F}}$. Gleichung 35 wird dann zur linearen Gleichung

$$\underline{\underline{F}} \cdot \underline{q} = \underline{0} \quad (36)$$

in der die Einträge von \underline{q} die unbekannte Ladungsdichteverteilung darstellen. Durch Gleichung (36) ist \underline{q} allerdings noch nicht vollständig bestimmt, da sie die triviale Lösung $\underline{q} = \underline{0}$ besitzt.

Um eine endliche Ladungsdichte zu erhalten, benötigt man eine Gleichung für das Potential der Scheibe. Eine Möglichkeit besteht darin, ein aus 2 identischen Scheiben bestehendes System zu betrachten (Abb. 3).

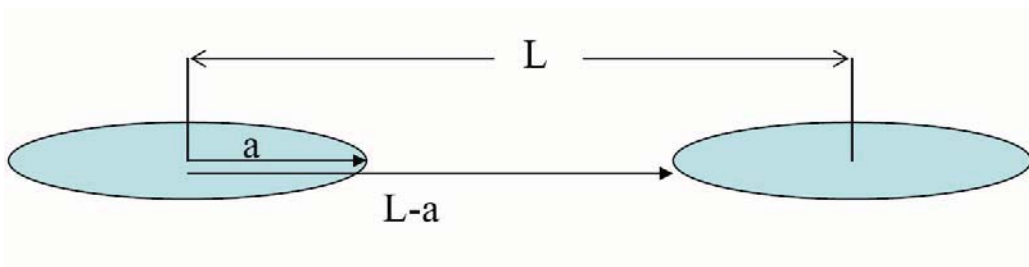


Abbildung 3: Geometrie des aus zwei identischen Scheiben aufgebauten Sendesystemes. Der Abstand der Mittelpunkte ist L , der Radius der Scheiben a .

Die Integration von E_r entlang der Verbindungslinie der beiden Scheibenmittelpunkte ergibt die angelegte Spannung U . Da $E_r=0$ auf den Scheiben, gilt:

$$U = \int_a^{L-a} [E_r(r,0) + E_r(L-r,0)] dr = 2 \int_a^{L-a} E_r(r,0) dr \quad (37)$$

$E_r(r,0)$ wurde in Gl. (32) berechnet und lässt sich direkt einsetzen. Die Integration über r kann man ausführen, und man erhält:

$$\begin{aligned} U &= 2 \int_a^{L-a} \frac{1}{2\epsilon_0} \int_0^\infty u \tilde{q}(u) [1 - R(u)e^{-2ud}] J_1(ur) du dr \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^\infty u \tilde{q}(u) (1 - R(u)e^{-2ud}) \left[\int_a^{L-a} J_1(ur) dr \right] du \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^\infty \tilde{q}(u) (1 - R(u)e^{-2ud}) [J_0(ua) - J_0(u(L-a))] du \end{aligned} \quad (38)$$

Um eine explizite Diskretisierung definieren zu können, wird die Ladungsdichte wieder mittels Gl. (20) im Raumbereich aufgeschrieben. Fasst man alle Terme mit u zusammen, so erhält man:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^a \int_0^a s q(s) J_0(us) ds (1 - R(u)e^{-2ud}) [J_0(ua) - J_0(u(L-a))] du \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^a s q(s) G(s) ds \end{aligned} \quad (39)$$

mit

$$G(s) = \int_0^{\infty} (1 - R(u)e^{-2ud}) J_0(us) [J_0(ua) - J_0(u(L-a))] du \quad (40)$$

Gleichungen (39) und (40) werden wiederum durch Diskretisierung der Scheibe in eine Gleichung der Form

$$\underline{q} \cdot \underline{G} = U \quad (41)$$

umgesetzt.

Gleichung (41) ist die inhomogene Bedingung, die nötig ist, um die triviale Lösung $\underline{q} = \underline{0}$ auszuschließen und eine vom Potential abhängige Ladungsdichte zu erhalten. Man wählt also ein beliebiges U und erhält aus der Lösung von (36) unter der Bedingung (41) eine Ladungsdichteverteilung $q(r)$. Die Gesamtladung erhält man mit Gl. (3), und die Kapazität aus Gl. (4).

Für ein aus zwei Scheiben bestehendes System gilt die Lösung nur in hinreichendem Abstand der Scheiben zueinander, da die gegenseitige Beeinflussung der Ladung auf den beiden Scheiben hier nicht berücksichtigt wurde. Eine quantitative Abschätzung dieses Effektes wurde bisher nicht vorgenommen. Betrachtungen mit halbkugelförmigen Elektroden im Gleichstromfall legen nahe, dass die vernachlässigten Terme von der Ordnung $(a/L)^4$ sind, so dass die Näherung schon bei geringen Elektrodenabständen gut funktioniert.

Die berechnete Kapazität C der Elektrode ist komplex, da der Reflektionsfaktor (Gl. 29) komplex ist. Aus ihr lässt sich mit

$$Z = \frac{1}{i\omega C}$$

die komplexe Impedanz der Elektrode, bzw. deren Betrag und Phase berechnen.

5 Ergebnisse

Um die Genauigkeit der Lösung zu bewerten, wurden die Ergebnisse mit einer analytischen Lösung für eine Kugelelektrode verglichen, die von Hördt (2007) vorgestellt wurde. Abbildung 4 zeigt die Geometrie und die Parametrisierung. Für die mittlere Schale mit Radius r_l wird hier Vakuum gewählt werden, mit $\sigma_l = 0$ und $\epsilon_l = \epsilon_0$ (Permittivität des Vakuums).

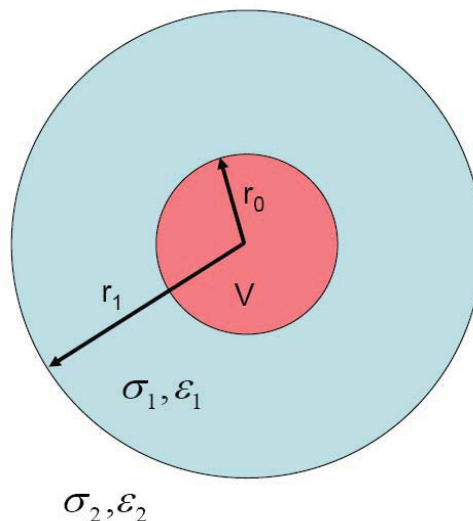


Abbildung 4: Geometrie der Kugelelektrode. Eine ideal leitende Elektrode mit Potential V und Radius r_0 ist in eine Kugelschale mit Radius r_l eingebettet.

Die Impedanz der Elektrode ergibt sich dann zu:

$$Z = \frac{1}{4\pi r_0 \sigma_1^*} \left(\frac{1 - \frac{\sigma_2^*}{\sigma_1^*} + \frac{\sigma_2^* r_1}{\sigma_1^* r_0}}{\frac{\sigma_2^* r_1}{\sigma_1^* r_0}} \right) \quad (42)$$

wobei

$$\sigma^* = \sigma + i\omega\varepsilon \quad (43)$$

In Abbildung 5 wird der Betrag der Impedanz der Scheibenelektrode mit der einer Kugelelektrode verglichen. Die Radien wurden so gewählt, dass die Oberfläche der Kugel gleich der einseitigen Fläche der Scheibe ist. Bei der Kugelelektrode wurde für die mittlere Schale die Werte für Vakuum eingesetzt, der Abstand entspricht der Dicke der mittleren Schale.

Für mittlere Abstände stimmen die Impedanzen der Kugelelektrode und der Scheibenelektrode überein, bei großen und kleinen Abständen sind die Impedanzen unterschiedlich, was auch so zu erwarten ist. Der Grenzwert großer Abstände entspricht der Impedanz der Elektrode im Vakuum. Die Impedanzen beider Elektroden in Abb. 5 konvergieren gegen den jeweiligen Grenzwert.

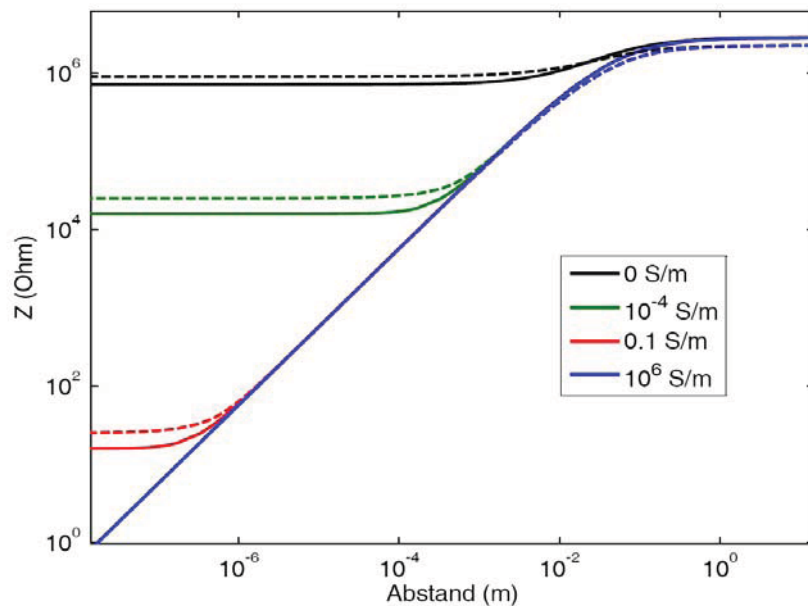


Abbildung 5: Impedanzbetrag der kapazitiven Elektrode gegen Abstand der Elektrode zum Medium für verschiedene Leitfähigkeiten des Mediums. Durchgezogene Linie: Kugelelektrode mit Radius 0.05m. Gestrichelte Linie: Scheibenelektrode mit Radius 0.1m. Die Frequenz ist $f=10$ kHz, die relative Permittivität des Untergrundes ist in beiden Fällen $\varepsilon_r=4$.

Für die Kugel mit Radius r_0 beträgt dieser (Smythe, 1968):

$$Z = \frac{1}{4\pi i\omega \varepsilon_0 r_0} \quad (44)$$

und für eine Scheibe mit Radius a:

$$Z = \frac{1}{8i\omega \varepsilon_0 a} \quad (45)$$

Wenn $a=2r_0$, wie für die Rechnung aus Abb. 5 der Fall, entspricht die Gesamtfläche der Kugel der einseitigen Fläche der Scheibe. Dann ist die Vakuumimpedanz der Scheibe etwas kleiner, weil im Vakuum beide Seiten der Scheibe gleich wirksam sind.

Für kleine Abstände ist der Vergleich von der Leitfähigkeit des Untergrundes abhängig. Bei moderaten Leitfähigkeiten (rote und grüne Kurve) konvergiert der Impedanzbetrag gegen den Grenzwert der galvanischen Ankopplung, also den Fall, dass die Scheibe aufliegt, bzw. die Kugel direkten Kontakt zum leitenden Medium hat. Der Grenzwert ist für die Kugel

$$Z = \frac{1}{4\pi\sigma r_0} \quad (46)$$

und für die kreisförmige Scheibe

$$Z = \frac{1}{4\sigma a} \quad (47)$$

wobei σ die Gleichstromleitfähigkeit ist.

In diesem Fall liefert die Scheibe bei gleicher Oberfläche (mit $a=2r_0$) die etwas größere Impedanz. Eine Gleichheit ist hier nicht zu erwarten, da nicht nur die Fläche wichtig ist, sondern auch die Stromverteilung im Medium. Bei sehr hohen Leitfähigkeiten in der Größenordnung von Metallen (blaue Kurve) wird der Grenzwert auch für extrem kleine Abstände noch nicht erreicht. Bei $\sigma=0$ (schwarze Kurve) sind nur die Verschiebungsströme (mit $\varepsilon_r=4$) zur Ankopplung wirksam. Die Scheibe hat eine etwas höhere Impedanz verglichen mit der Kugel.

Insgesamt verhalten sich die Kurven wie erwartet. Im mittleren Abstandsbereich ist nur die Ankopplungsfläche relevant und die Impedanzen von Kugel und Scheibe stimmen überein. Bei sehr großen und sehr kleinen Abständen werden jeweils die analytischen Grenzwerte erreicht, die für Kugel und Scheibe unterschiedlich sind.

Der Verlauf der Impedanz in Abbildung 5 hat zwei wichtige Konsequenzen. Zum Einen nimmt die Impedanz stetig als Funktion der Höhe zu. Dies schließt den Grenzwert einer galvanisch gekoppelten Elektrode ein. Das bedeutet, dass eine kapazitiv gekoppelte Elektrode niemals eine geringere Impedanz haben kann, als eine galvanisch gekoppelte, aufliegende. Zum Anderen ist der Übergang von der aufliegenden zur abgehobenen Elektrode stetig. Dies könnte der Intuition widersprechen; man würde evtl. einen Sprung der Impedanz zwischen aufliegender und abgehobener Impedanz erwarten.

Um das beobachtete Verhalten zu verstehen, ist in Abb. 6 die Impedanz in Real- und Imaginärteil aufgespalten dargestellt, mit anderem Abstandsbereich. Der Realteil (Mitte) der Impedanz ist für sehr große und sehr kleine Leitfähigkeiten verschwindend gering bzw. identisch null und wird nicht mit dargestellt. Bei moderaten Leitfähigkeiten (grüne und rote Kurve) wird die Impedanz durch den Realteil dominiert. Bei extrem niedriger und bei extrem hoher Leitfähigkeit überwiegt der Imaginärteil.

Dieses Verhalten lässt sich verstehen, wenn man die Gesamtimpedanz näherungsweise als Reihenschaltung zwischen einem kapazitiven Anteil und einem Erdungswiderstand betrachtet. Der kapazitive Anteil Z_c entspricht der Überwindung des Raumes zwischen Boden und Luft und ist rein imaginär, der Erdungswiderstand Z_e ist komplex und entspricht dem Ankopplungswiderstand der aufliegenden Platte. Man kann daher näherungsweise schreiben:

$$Z = Z_c + Z_e = \frac{d}{i\omega\epsilon_0\pi a^2} + \frac{1}{4a(\sigma + i\omega(\epsilon_0 + \epsilon_1))} \quad (48)$$

Zunächst einmal erklärt das Modell, warum der Übergang zwischen aufliegender und abgehobener Platte stetig ist und kein Sprung auftritt. Wenn der Abstand $d \rightarrow 0$, beginnt der 2. Term zu dominieren und „übernimmt“ stetig die Ankopplung. Allerdings ist in der Abbildung zu erkennen, dass der Übergang bei extrem kleinen Abständen erfolgt, die sogar unterhalb eines Atomdurchmessers liegen können. In der Praxis wird der stetige Übergang in der Regel also nicht zu sehen sein, sondern als Sprung erscheinen.

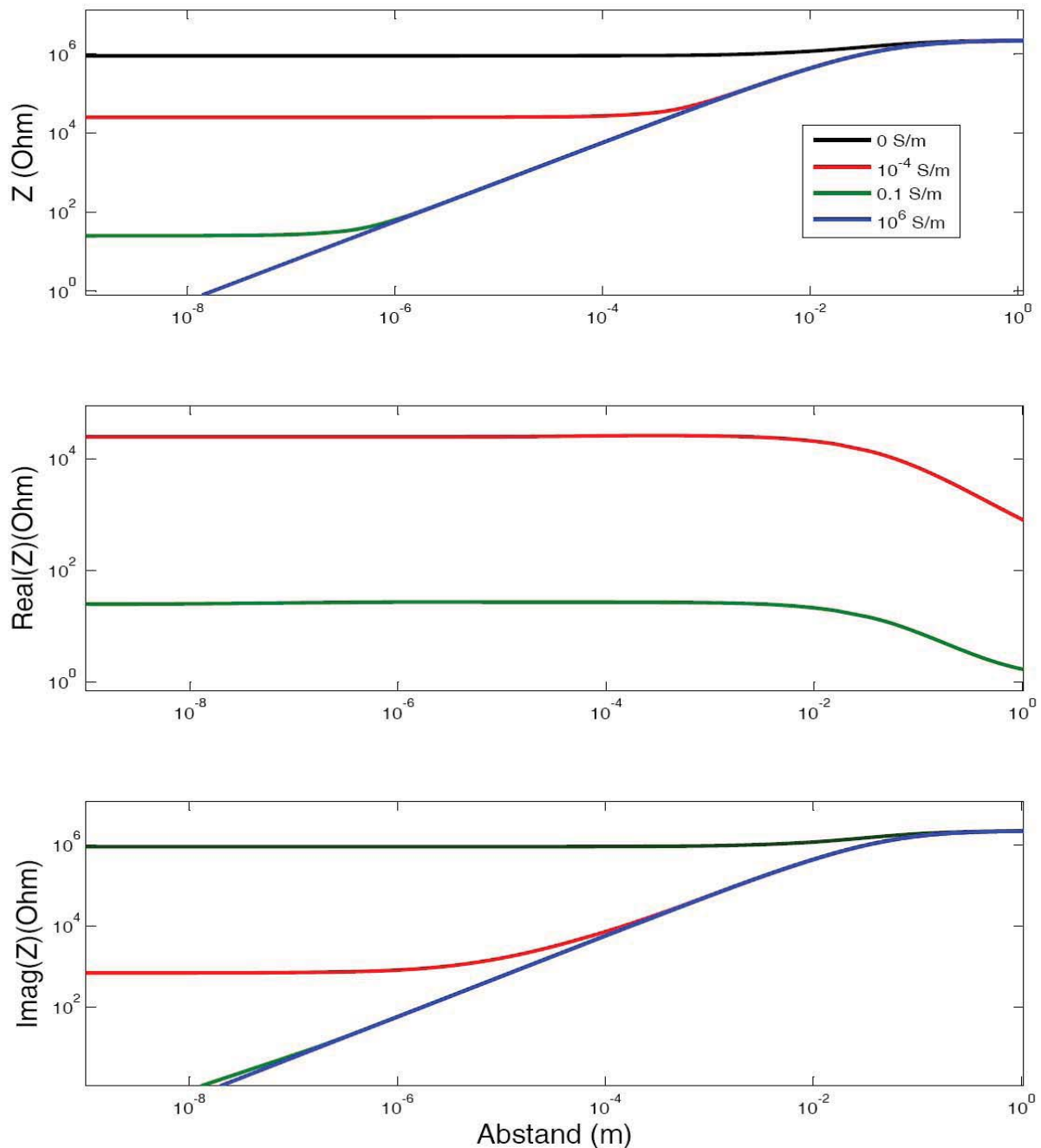


Abbildung 6: Betrag der Impedanz (oben), Realteil (mitte) und Imaginärteil (unten) für die Scheibe für dasselbe Modell wie in Abb. 5. Der Realteil der Impedanz (mitte) für $\sigma=0$ ist identisch null und nicht darstellbar, der Realteil für die sehr gut leitende Platte ist extrem klein und wird nicht dargestellt.

Das Modell aus Gl. (48) erklärt auch die Zerlegung der Impedanz in Real- und Imaginärteil. Bei sehr kleiner Leitfähigkeit und kleinem Abstand dominiert der Imaginärteil der Impedanz, bei moderater und hoher Leitfähigkeit dominiert der Realteil. Bei sehr hoher Leitfähigkeit wird der Abstand, in dem der 1. Term vernachlässigbar ist, in der Abbildung nicht erreicht und es dominiert immer noch der rein imaginäre 1. Term die Gesamtimpedanz.

6 Schlussfolgerungen

Es wurde ein Programm entwickelt, um die Impedanz einer kreisförmigen Scheibe über einem homogenen Halbraum zu berechnen. Das Verfahren beruht auf einer vollständigen Lösung der Maxwellgleichungen. Es verwendet eine Näherung, bei der angenommen wird, dass der Radius der Scheibe klein ist gegen die elektromagnetische Wellenlänge. Die Näherung verliert bei sehr hohen Frequenzen ihre Gültigkeit, ist jedoch beispielsweise für einen Radius 0.1m und eine Frequenz von 1 MHz vollkommen unproblematisch. Das Programm wurde durch Vergleich mit einer analytischen Lösung für eine Kugelelektrode und durch analytische Grenzwerte für große und kleine Abstände verifiziert.

Der Übergang zur Impedanz einer aufliegenden Elektrode erfolgt stetig als Funktion des Abstandes zwischen Elektrode und Halbraum. Die Impedanz der aufliegenden Scheibe ist immer kleiner als die der angehobenen. Dies bedeutet, dass die Übergangsimpedanz nicht durch eine kapazitive Elektrode gegenüber einer gleich gebauten, galvanischen verringert werden kann. Der galvanische Anteil der Impedanz ist auch bei kapazitiver Ankopplung mit enthalten.

In der Praxis kann es dennoch sinnvoll sein, kapazitive Elektroden statt galvanische zu verwenden, also den galvanischen Kontakt durch Isolierung oder Anheben zu verhindern. Bei aufliegenden Elektroden ist die Impedanz sehr schwer zu kontrollieren, da die Auflagefläche stark variieren kann. Dies kann dazu führen, dass die Impedanz um Größenordnungen schwankt, da sie sehr stark als Funktion des Abstandes variiert und die aufliegenden Teile die Ankopplung dominieren können. Eine Isolierung stabilisiert die Impedanz und verhindert starke Schwankungen, was für die Messung von Vorteil sein kann.

7 Referenzen

Hördt, A., 2007, Contact impedance of grounded and capacitive electrodes, in: Ritter, O., Brasse, H., Protokoll zum 22. Kolloquium „Elektromagnetische Tiefenforschung“, 164-173.

Kuras, O., Beamish, D., Meldrum, P.I., and Ogilvy, R.D., 2006, Fundamentals of the capacitive resistivity technique. Geophysics, 71, G135-G152.

Smythe, W., 1968. Static and dynamic electricity, McGraw-Hill.