

3-D Finite Elemente zur Diskretisierung der Maxwell-Gleichungen

Christoph Schwarzbach (TU Bergakademie Freiberg)

schwarzb@geophysik.tu-freiberg.de

Abstract

Elektromagnetische Phänomene können mathematisch-physikalisch durch Randwertaufgaben beschrieben werden. In der Regel ist es nur möglich, die Lösung der Randwertaufgaben approximativ durch numerische Verfahren, wie die Methoden der Finiten Elemente oder Finiten Differenzen, zu bestimmen. Ausgangspunkt für die Methode der Finiten Elemente bildet dabei die Variationsformulierung. Diese wird unter Verwendung des Innenprodukts in Funktionenräumen aus der klassischen Randwertaufgabe gewonnen. Spezielle Finite-Elemente-Typen kommen für die Diskretisierung von Vektorfeldern zum Einsatz. Sie weisen im einfachsten Fall eine strukturelle Ähnlichkeit zur bei der Methode der Finiten Differenzen verwendeten Yee-Zelle (*staggered grid*) auf. Eine Verbesserung der Approximation der gesuchten Lösung kann neben der Gitterverfeinerung durch die Verwendung von Elementtypen mit Polynomen höherer Ordnung erzielt werden.

1 Einleitung

Software zur numerischen Simulation elektromagnetischer Phänomene, die auf der Methode der Finiten Elemente (FEM) basiert, erfreut sich zunehmender Beliebtheit. Ursachen dafür sind eine hohe Flexibilität bezüglich der Geometrie und der räumlichen Verteilung von Materialgrößen sowie die Möglichkeit, Approximationen der gesuchten Lösung von höherer Ordnung zu erhalten. Dieser Beitrag stellt deshalb am Beispiel der harmonischen Ausbreitung elektromagnetischer Wellen die Vorgehensweise vor, aus der üblichen Formulierung des Problems als Randwertaufgabe über die Formulierung als Variationsproblem eine Finite-Elemente-Lösung zu erhalten. Von besonderem Interesse sind die speziellen Typen finiter Elemente, die für die Diskretisierung von Vektorfeldern im dreidimensionalen Raum zum Einsatz kommen. Ein Vergleich von numerischer und analytischer Lösung eines vertikalen elektrischen Dipols schließt den Artikel.

2 Klassische Randwertaufgabe

Die Ausbreitung zeitharmonischer elektromagnetischer Wellen kann als Randwertaufgabe für das elektrische Feld E formuliert werden. Die klassische Formulierung des Randwertproblems wird aus dem System der Maxwell-Gleichungen gewonnen. Dabei gelte eine Zeitabhängigkeit der Form $e^{-i\omega t}$, wobei i die imaginäre Einheit und ω die Kreisfrequenz bezeichnen. Die Randwertaufgabe wird durch Differentialgleichungen, Stetigkeitsbedingungen und Randbedingungen vollständig beschrieben:

1. In Gebieten Ω_j , $j = 1, 2, \dots$, mit glatter (einmal stetig differenzierbarer) Verteilung der Materialparameter gelten die Differentialgleichungen

$$\operatorname{rot} \left(\boldsymbol{\mu}^{-1} \operatorname{rot} E \right) - \omega^2 \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} E = i\omega J_v \quad (1)$$

$$i\omega \operatorname{div} (\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} E) = \operatorname{div} J_v . \quad (2)$$

Hierbei sind $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} = \boldsymbol{\epsilon} + \frac{i}{\omega} \boldsymbol{\sigma}$ der Tensor der komplexen elektrischen Permittivität, $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\epsilon}$ und $\boldsymbol{\sigma}$ die Tensoren der magnetischen Permeabilität, der elektrischen Permittivität und der elektrischen Leitfähigkeit sowie J_v eine Quellstromdichte.

2. An der Grenze zwischen zwei Gebieten Ω_{j_1} und Ω_{j_2} , $j_1 \neq j_2$, ist die Stetigkeit der Tangentialkomponenten der elektrischen und magnetischen Felder \mathbf{E} und \mathbf{H} sowie der Normalkomponenten der elektrischen Stromdichte \mathbf{J} , der dielektrischen Verschiebung \mathbf{D} und der magnetischen Induktion \mathbf{B} zu fordern.
3. Der Rand von $\Omega = \cup_j \Omega_j$ wird zerlegt in disjunkte Gebiete Γ_1 und Γ_2 , auf denen dirichletsche bzw. neumannsche Randbedingungen gestellt werden,

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_0 \quad \text{auf } \Gamma_1, \quad (3)$$

$$\mathbf{n} \times (\boldsymbol{\mu}^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{E}) = i\omega \mathbf{J}_f \quad \text{auf } \Gamma_2, \quad (4)$$

$$i\omega \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{E}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}_v \quad \text{auf } \Gamma_2, \quad (5)$$

wobei \mathbf{E}_0 ein gegebenes elektrisches Feld auf Γ_1 ist und \mathbf{J}_f eine gegebene Flächenstromdichte auf Γ_2 , die $\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}_f = 0$ genügt. Während die Randbedingungen (3) und (4) der Vektorwellengleichung (1) zugehörig sind, ergänzt die Randbedingungen (5) die Kontinuitätsgleichung (2).

3 Variationsformulierung

Ausgangspunkt für die Methode der Finiten Elemente bildet nicht die Formulierung als klassische Randwertaufgabe, sondern die sogenannte Variationsformulierung oder schwache Formulierung. Der Terminus *schwach* weist im mathematischen Sprachgebrauch darauf hin, dass die Identität der zwei Seiten einer Gleichung $x = y$ nur im Innenproduktsinne erfüllt sein muss, d. h. es wird die Identität der Innenprodukte von x und y mit ϕ , $(x, \phi) = (y, \phi)$, für alle ϕ gefordert. Das Innenprodukt zweier komplex- und vektorwertiger, quadratisch integrierbarer Funktionen Φ und Ψ ist definiert als

$$(\Phi, \Psi) := \int_{\Omega} \bar{\Phi} \cdot \Psi \, d^3r, \quad (6)$$

wobei $\bar{\Phi}$ die konjugiert komplexe Funktion von Φ bezeichnet. Ausgehend von Gleichung (1) erhält durch Bildung des Innenprodukts mit einer Testfunktion Φ , der Umformung (z. B. Monk 2003, S. 51)

$$\int_{\Omega} \bar{\Phi} \cdot \operatorname{rot} (\boldsymbol{\mu}^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{E}) \, d^3r = \int_{\Omega} \operatorname{rot} \bar{\Phi} \cdot (\boldsymbol{\mu}^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{E}) \, d^3r + \int_{\partial\Omega} \bar{\Phi} \cdot (\mathbf{n} \times (\boldsymbol{\mu}^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{E})) \, d^2r, \quad (7)$$

der neumannschen Randbedingung (4) und der Forderung $\mathbf{n} \times \Phi = \mathbf{0}$ auf Γ_1 das folgende Variationsproblem

Bestimme $\mathbf{E} \in \mathcal{U}$, so dass

$$\int_{\Omega} \operatorname{rot} \bar{\Phi} \cdot (\boldsymbol{\mu}^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{E}) \, d^3r - \omega^2 \int_{\Omega} \bar{\Phi} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{E}) \, d^3r = i\omega \int_{\Omega} \bar{\Phi} \cdot \mathbf{J}_v \, d^3r - i\omega \int_{\Gamma_2} \bar{\Phi} \cdot \mathbf{J}_f \, d^2r. \quad (8)$$

für alle $\Phi \in \mathcal{V}$ gilt. Dabei sind die Funktionenräume \mathcal{U} der Ansatzfunktionen und \mathcal{V} der Testfunktionen definiert durch

$$\mathcal{U} = \{ \mathbf{E} \in H^{\operatorname{rot}}(\Omega) : \mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_0 \text{ auf } \Gamma_1 \}, \quad (9)$$

$$\mathcal{V} = \{ \Phi \in H^{\operatorname{rot}}(\Omega) : \mathbf{n} \times \Phi = \mathbf{0} \text{ auf } \Gamma_1 \}, \quad (10)$$

$$H^{\operatorname{rot}} = \{ \Psi \in L^2(\Omega)^3 : \operatorname{rot} \Psi \in L^2(\Omega)^3 \}. \quad (11)$$

Das Variationsintegral (8) beinhaltet die Differentialgleichung (1), die Stetigkeit der Tangentialkomponenten von \mathbf{H} sowie die neumannsche Randbedingung (4). Diese Gleichungen werden bei der numerischen Approximation nur näherungsweise erfüllt, während die dirichletsche Randbedingung (3) sowie die Stetigkeit der Tangentialkomponenten von \mathbf{E} durch die Konstruktion der Funktionenräume \mathcal{U} und \mathcal{V} exakt gelten. Weiterhin kann man zeigen, dass Lösungen von (8) implizit und näherungsweise die Differentialgleichung (2) sowie die Randbedingung (5) erfüllen, falls $\omega > 0$.

4 Methode der Finiten Elemente

Nachdem die klassische Randwertaufgabe (1) bis (5) in die schwache Form gebracht worden ist, kann nun die Methode der Finiten Elemente angewandt werden, um die gesuchte Lösung numerisch zu approximieren. Dazu sind folgende Schritte erforderlich:

1. Das Gebiet Ω wird in einfache geometrische Elemente zerlegt, z. B. Hexaeder oder Tetraeder.
2. Der unendlich-dimensionale Funktionenraum H^{rot} wird durch einen endlich-dimensionalen Funktionenraum H_h^{rot} approximiert. Damit werden auch \mathcal{U} und \mathcal{V} endlich-dimensional und erhalten den Index h . Das Variationsproblem wird nun mit Ansatz- und Testfunktionen aus \mathcal{U}_h und \mathcal{V}_h formuliert.
3. Für H_h^{rot} wird ein vollständiger Satz Basisfunktionen $\{\Phi_i\}_{i=1}^n$ konstruiert. Damit lassen sich die gesuchten Felder als Linearkombination der vektorwertigen Basisfunktionen darstellen,

$$E(\mathbf{r}) = \sum_i e_i \Phi_i(\mathbf{r}). \quad (12)$$

Die Basisfunktionen werden derart sortiert, dass die ersten $m \leq n$ Funktionen $\{\Phi_i\}_{i=1}^m$ eine Basis von \mathcal{V}_h bilden. Die Koeffizienten e_i der restlichen Basisfunktionen $\Phi_i, i = m + 1, \dots, n$, sind durch die Dirichletsche Randbedingung (3) festgelegt, die explizit in die Konstruktion von \mathcal{U}_h eingeht. Damit ist $E \in \mathcal{U}_h$.

4. Die Forderung der Gültigkeit des Variationsintegrals (8) für alle Testfunktionen $\Phi \in \mathcal{V}_h$ ist äquivalent dazu, die Gültigkeit für alle Basisfunktionen $\Phi_i \in \mathcal{V}_h, i = 1, \dots, m$, zu fordern. Mit der j -ten Basisfunktion als Testfunktion ergibt sich aus dem Variationsintegral (8) und dem Ansatz (12) die j -te Zeile eines linearen Gleichungssystems zur Bestimmung der Linearkoeffizienten e_i ,

$$\sum_{i=1}^m a_{j,i} e_i = f_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad (13)$$

mit

$$a_{j,i} = \int_{\Omega} \text{rot } \bar{\Phi}_j \cdot (\boldsymbol{\mu}^{-1} \text{rot } \Phi_i) d^3r - \omega^2 \int_{\Omega} \bar{\Phi}_j \cdot (\bar{\boldsymbol{\epsilon}} \Phi_i) d^3r, \quad (14)$$

$$f_j = i\omega \int_{\Omega} \bar{\Phi}_j \cdot \mathbf{J}_v d^3r - i\omega \int_{\Gamma_2} \bar{\Phi}_j \cdot \mathbf{J}_f d^2r - \sum_{i=m+1}^n a_{j,i} e_i. \quad (15)$$

Damit ist die Lösung der Randwertaufgabe auf die Lösung eines linearen Gleichungssystems mit komplexer, symmetrischer – nicht hermitescher – Koeffizientenmatrix A reduziert worden. Die für die Methode der Finiten Elemente charakteristische Wahl von stückweise polynomialen Basisfunktionen mit kleinem Träger – jede Basisfunktion ist nur auf einer kleinen Anzahl von Elementen ungleich Null – führt außerdem zu einer dünn besetzten Struktur von A .

Mit der Lösung des linearen Gleichungssystems $e_i, i = 1, \dots, m$, und den festgelegten Koeffizienten $e_i, i = m + 1, \dots, n$, liefert die Darstellung (12) das elektrische Feld für jeden Punkt im Gebiet Ω . Dabei bilden die Basisfunktionen $\Phi_i, i = 1, \dots, n$, die natürlichen, interpolatorischen Funktionen. Die Koeffizienten e_i entsprechen jedoch im Allgemeinen nicht dem Wert einer Komponente des Feldes an bestimmten Punkten des Raumes. Man beachte, dass die Koeffizienten Skalare und die Basisfunktionen Vektoren sind. Das Konzept zur Diskretisierung von Vektorfeldern soll im folgenden Abschnitt näher erläutert werden.

5 Finite Elemente für Vektorfelder

Zur Diskretisierung von Vektorfeldern werden spezielle Finite-Elemente-Typen benutzt (Kanten-/Nédélec-/Whitney-Elemente; Nédélec 1980; Whitney 1957). Ihre Basisfunktionen sind vektorwertig

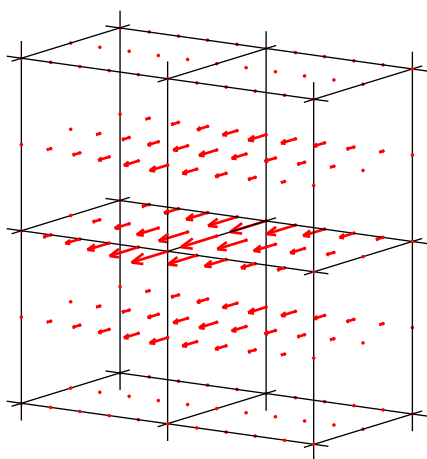


Abbildung 1: Ausschnitt eines Hexaedergitters mit einer stückweise linearen Basisfunktion, wie sie für die Diskretisierung von Vektorfeldern mit stetigen Tangentialkomponenten, z. B. von E , verwendet wird. Der Träger der Funktion besteht aus den 4 Hexaederelementen; auf allen anderen verschwindet sie.

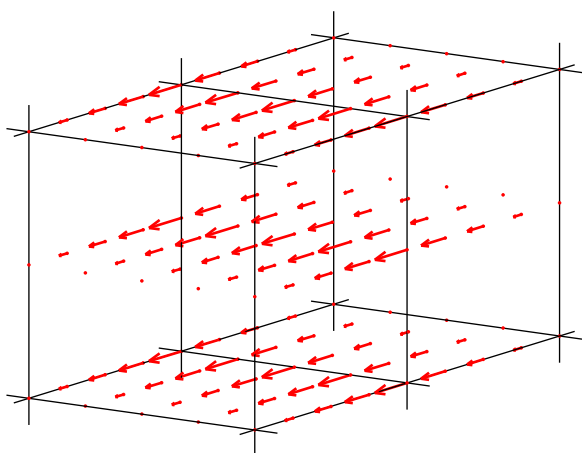


Abbildung 2: Ausschnitt eines Hexaedergitters mit einer stückweise linearen Basisfunktion, wie sie für die Diskretisierung von Vektorfeldern mit stetigen Normalkomponenten, z. B. von B , verwendet wird. Der Träger der Funktion besteht aus den 2 Hexaederelementen; auf allen anderen verschwindet sie.

und werden so konstruiert, dass sie den speziellen Forderungen an die Stetigkeit der Tangential- oder Normalkomponente genügen oder aber Sprünge zulassen. So hat jede Basisfunktion zur Diskretisierung des elektrischen Feldes (analog für das magnetische Feld) die Eigenschaft, dass ihre Tangentialkomponente auf Kanten oder Flächen der Elemente entweder verschwindet oder stetig ist, nicht jedoch zwingenderweise die Normalkomponente (Abb. 1). Basisfunktionen für die Diskretisierung von elektrischer Stromdichte, dielektrischer Verschiebung oder magnetischer Induktion hingegen haben entweder verschwindende oder stetige Normalkomponenten auf Elementflächen, lassen jedoch Sprünge in den Tangentialkomponenten zu (Abb. 2). Gelten die Stetigkeitseigenschaften für jede Basisfunktion, so gelten sie auch für jede beliebige Linearkombination derselben.

Die zur Darstellung der Felder als Linearkombination der vektorwertigen Basisfunktionen verwendeten Linearkoeffizienten sind skalare Größen und werden im Sprachgebrauch der Finite-Elemente-Theorie als Freiheitsgrade bezeichnet. Sie haben in der klassischen Definition von Nédélec (1980) die Bedeutung von gewichteten Momenten des Feldes. Das heißt, sie sind im Falle des elektrischen Feldes Integrale über die Tangentialkomponente des Feldes entlang einer Kante, über die zwei Tangentialkomponenten auf einer Randfläche des Elements bzw. über das Feld selbst im Volumen des Elements, die mit polynomialen Funktionen gewichtet sind. Die Beschränkung auf Tangentialkomponenten auf den Flächen und Kanten trägt der Tatsache Rechnung, dass nur die Tangentialkomponente von E stetig über Elementgrenzen hinweg ist. Die klassischen Freiheitsgrade für die magnetische Induktion z. B. sind definiert als Integrale über die Normalkomponente auf den Randflächen des Elements bzw. über die magnetische Induktion selbst im Elementvolumen. Damit wird der Stetigkeit der Normalkomponenten und der möglichen Unstetigkeit der Tangentialkomponenten über Elementgrenzen hinweg Rechnung getragen. Einen äquivalenten Satz von Freiheitsgraden erhält man, indem man anstelle der Momente des Feldes, also integraler Freiheitsgrade, punktuelle Freiheitsgrade verwendet. Ein solcher Freiheitsgrad entspricht gerade einer Komponente des Feldes an einem bestimmten Punkt des Elements.

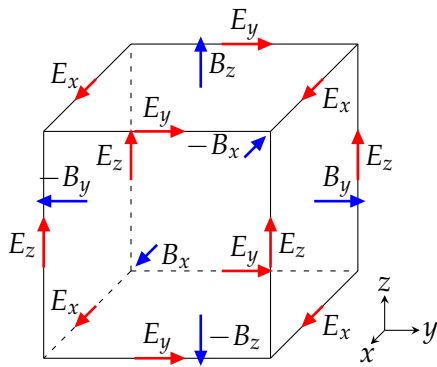


Abbildung 3: Anordnung der Feldkomponenten auf einem linearen Hexaederelement bzw. in einer Yee-Zelle.

6 Parallele zur Yee-Zelle (*staggered grid*)

Die einfachste Approximation der Felder erhält man mit stückweise linearen Basisfunktionen. Bei der Diskretisierung des elektrischen Feldes \mathbf{E} entspricht in diesem Falle der i -te Linearkoeffizient gerade der konstanten Tangentialkomponente des Feldes entlang der i -ten Kante des verwendeten Finite-Elemente-Gitters, multipliziert mit der Kantenlänge. Entsprechend ist bei der Diskretisierung der magnetischen Induktion \mathbf{B} der j -te Linearkoeffizient die konstante Normalkomponente von \mathbf{B} auf der j -ten Fläche des Gitters, multipliziert mit dem Flächeninhalt. Stellt man diese Freiheitsgrade grafisch für ein rechtwinkliges Hexaederelement dar, so ergibt sich dieselbe Anordnung der Feldkomponenten wie bei der Yee-Zelle (*staggered grid*, Abb. 3; Yee 1966).

Die linearen Gleichungssysteme, die man aus der Methode der Finiten Elemente bzw. der Finiten Differenzen erhält, unterscheiden sich jedoch in der Verknüpfung der Feldkomponenten untereinander. So sind bei der Methode der Finiten Elemente z. B. die im Hexaeder sich diagonal gegenüberliegenden Feldkomponenten E_x , E_y bzw. E_z verknüpft. Bei der Methode der Finiten Differenzen werden die Differenzenquotienten hingegen meist nur entlang der Koordinatenachsen gebildet. Man kann jedoch durch eine geeignete Mittelung der Feldkomponenten die Finite-Elemente-Darstellung in die bekannten Finite-Differenzen-Formeln überführen (Monk 1993).

Gegenüber der Finite-Differenzen-Approximation der Maxwell-Gleichungen mit der Yee-Zelle bietet die Finite-Elemente-Approximation einige Vorteile: Die Methode ist nicht auf orthogonale Gitter beschränkt, sondern erlaubt bei der Verwendung unstrukturierter Hexaeder- oder Tetraedergitter die Vernetzung komplexer Geometrien. Die Behandlung inhomogener Medien ist über die Integrale (14), welche die Koeffizienten des linearen Gleichungssystems bilden, wohl definiert. Sprünge in den Materialparametern sollten dabei mit Elementgrenzen zusammenfallen, weil innerhalb jedes Elements alle Feldkomponenten mit einer beliebig oft differenzierbaren, da polynomialen, und deshalb stetigen Funktion approximiert werden. Damit erübrigt sich die bei der Methode der Finiten Differenzen, insbesondere bei Finite-Differenzen-Sternen höherer Ordnung, erforderliche Mittelung von Materialeigenschaften.

Die Genauigkeit der numerischen Approximation kann sowohl durch verfeinerte Gitter als auch durch die Verwendung von Basisfunktionen höheren Polynomgrades, also stückweise quadratische, kubische usw. Basisfunktionen, erhöht werden. Approximationen höherer Ordnung führen insbesondere bei Wellenlösungen zu erheblich geringer numerischer Dispersion als beim Einsatz stückweise linearer Basisfunktionen. Dies wird im folgenden Abschnitt anhand eines numerischen Beispiels demonstriert.

7 Beispiel: Elektrischer Dipol

Wir betrachten einen idealen elektrischen Dipol im Mittelpunkt einer Kugel mit Radius $r = 1$ m, der durch das elektrische Dipolmoment \mathbf{p} beschrieben wird. Damit ist die Volumenquellstromdichte in Gleichungen (1) und (8) gegeben durch $\mathbf{J}_v(\mathbf{r}) = i\omega\mathbf{p}\delta(\mathbf{r})$, wobei $\delta(\mathbf{r})$ die Diracsche Deltafunktion bezeichnet. Auf der Kugeloberfläche wird eine Ausstrahlungsbedingung angesetzt,

$$\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{E} - ik\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) = 0. \quad (16)$$

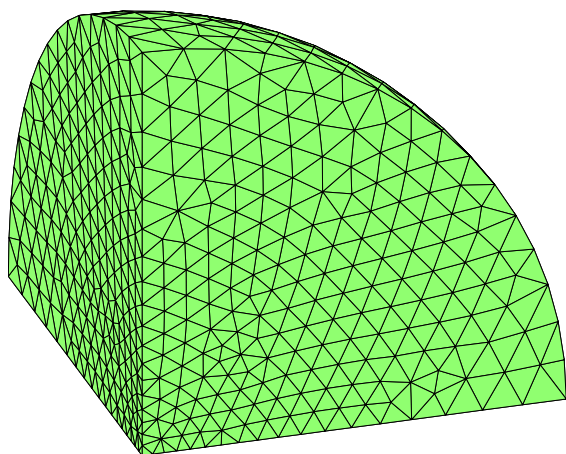


Abbildung 4: Oktant einer Kugel. Vernetzung mit 9732 Tetraedern.

Dabei ist \mathbf{n} der nach außen gerichtete Normalenvektor auf dem Rand und $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ die Wellenzahl. Ebene Wellen, die von innen senkrecht auf den Rand treffen, auf dem die Randbedingung (16) gefordert wird, passieren den Rand ohne Reflexion. Bei nicht-senkrechttem Einfall wird die Welle teilweise reflektiert.

Das Medium wird als isotrop und homogen angenommen mit den Materialparametern $\epsilon_r = 8$, $\mu_r = 1$ und $\sigma = 0.01 \text{ S/m}$. Aus Symmetriegründen genügt es, einen Oktanten der Kugel zu betrachten (Abb. 4), wenn die Dipolachse entlang einer der Schnittkanten gewählt wird. Auf den Schnittflächen werden entsprechend der Symmetrie der zu erwartenden Lösung homogene Dirichletsche oder Neumannsche Randbedingungen gefordert.

Die numerische Simulation erfolgte mit einem Code, der auf der Finite-Elemente-Bibliothek FEMSTER (Castillo, Rieben und White 2003) aufbaut und diese im Wesentlichen um komplexe Arithmetik, Funktionen zur Verwaltung von Materialeigenschaften sowie den direkten Gleichungslöser aus UMFPAK (Davis 2004) erweitert. Für die Frequenz $f = 100 \text{ MHz}$ wurde auf Tetraedergittern unterschiedlicher Größe und unter Verwendung von linearen, quadratischen und kubischen Basisfunktionen die numerische Näherungslösung E^{num} berechnet und mit der exakten Lösung E^{ana} verglichen.

Für jedes Element K des Finite-Elemente-Gitters ist der relative Fehler Δ_K der numerischen Lösung durch

$$\Delta_K := \frac{\|E^{ana} - E^{num}\|_{L_2}}{\|E^{ana}\|_{L_2}} \quad \text{mit der } L_2\text{-Norm} \quad \|F\|_{L_2} := \left(\int_K \bar{F} \cdot F \, d^3r \right)^{1/2} \quad (17)$$

gegeben. Abbildung 5 zeigt Δ_K für die unterschiedlichen Gitter und Polynomgrade. Dafür wurde die Kugel in 100 Kugelschalen zerlegt. Aus den relativen Fehlern Δ_K aller Elemente, deren Mittelpunkt in der Kugelschale mit mittlerem Radius r liegt, wurden das Minimum, der Median und das Maximum bestimmt und über dem Radius aufgetragen. In der linken Spalte befinden sich die Ergebnisse mit linearen Basisfunktionen und unterschiedliche Gittergrößen, in der rechten Spalte die Resultate mit verschiedenen Polynomgraden und fester Gittergröße.

Aufgrund der Quellsingularität der gesuchten Lösung ist der Fehler in der Nähe des Koordinatenursprungs am größten und fällt zum Rand hin ab. Während bei der Gitterverfeinerung der Fehler um weniger als eine Größenordnung reduziert werden konnte, wurde die Lösung durch die Verwendung von kubischen Basisfunktionen um gut zwei Größenordnungen gegenüber den linearen Basisfunktionen verbessert. In der Nähe der Quelle zeigt der Fehler unabhängig vom Polynomgrad hohe Werte und kann hier nur durch ein erheblich feineres Gitter verringert werden. Die geometrische Approximation der Kugeloberfläche durch Tetraeder mit ebenen Randflächen schlägt sich in einem Fehler der Lösung im Randbereich nieder, der beim kubischen Ansatz in Form eines ansteigenden Fehlerniveaus bei $r > 0.9 \text{ m}$ sichtbar wird. In allen anderen Grafiken wird dieser Fehlereinfluss durch die insgesamt schlechtere Approximation überdeckt.

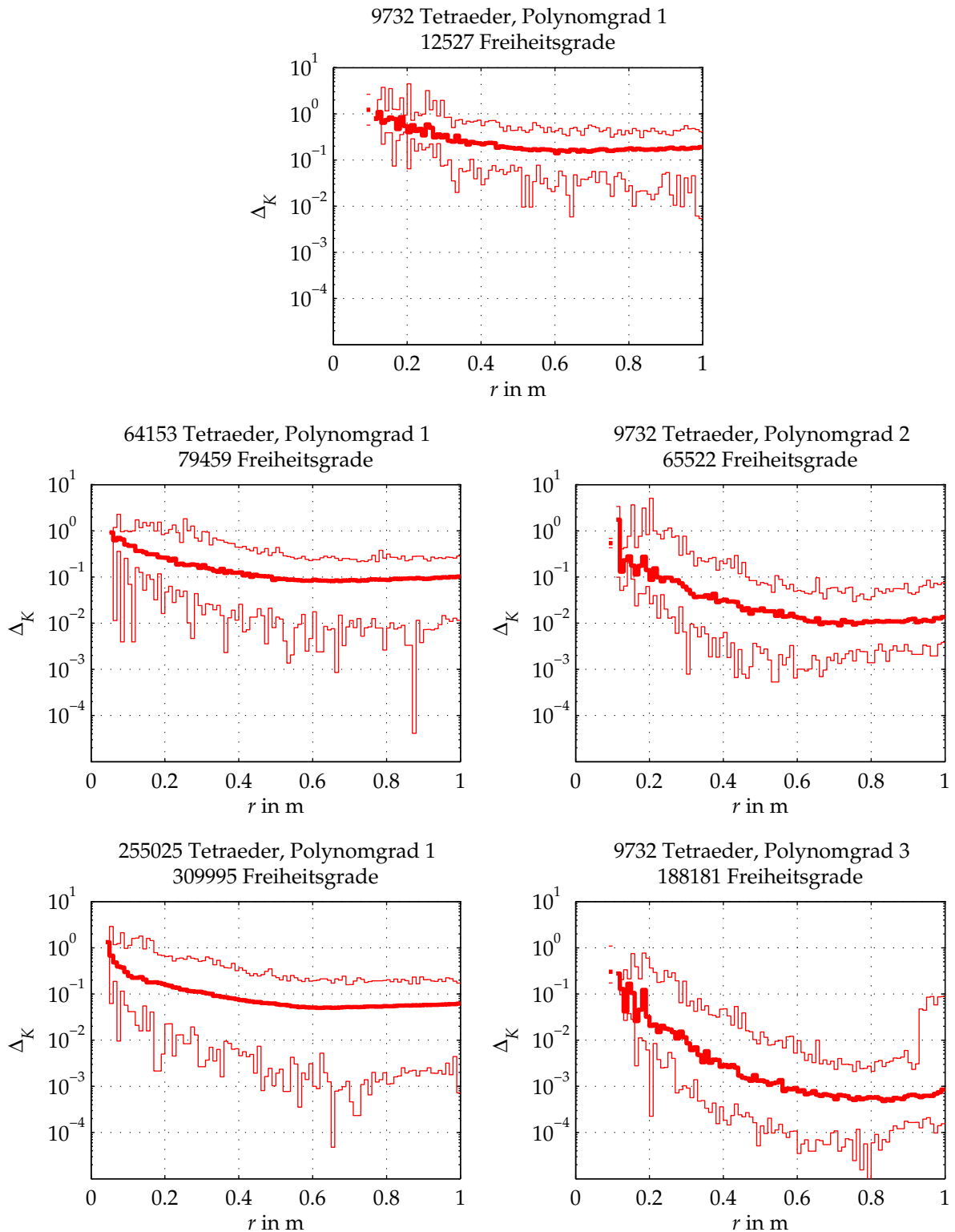


Abbildung 5: Maximum, Median und Minimum des relativen Fehlers Δ_K der Lösung $E(r)$ eines vertikalen elektrischen Dipols aufgetragen über dem Abstand des Elementmittelpunkts zum Dipol.

8 Zusammenfassung

Anhand des Vergleichs von analytischer und numerischer Lösung eines vertikalen Dipols wurde die Verbesserung der Lösung mit zunehmend feinerem Gitter (h -Verfeinerung) oder der Verwendung von Basisfunktionen höheren Polynomgrades (p -Verfeinerung) demonstriert. Dabei erweist sich in Gebieten, wo die Lösung hinreichend glatt ist, die p -Verfeinerung als erheblich effizienter. In der Nähe von Singularitäten der gesuchten Lösung und entlang gekrümmter Flächen kann eine Verbesserung der Approximation im Wesentlichen durch eine h -Verfeinerung, unter Umständen kombiniert mit einer p -Verfeinerung, erzielt werden. Es verbleibt, die Approximationseigenschaften für inhomogene Medien mit kontinuierlich oder diskontinuierlich variierenden Materialeigenschaften zu untersuchen.

Literatur

- Castillo, P., Rieben, R. N. und White, D. A. (2003). FEMSTER: An object oriented class library of discrete differential forms. In *Proceedings of the 2003 IEEE International Antennas and Propagation Symposium* (Bd. 2, S. 972–976). Columbus, OH. (UCRL-JC-150238-ABS)
- Davis, T. A. (2004). Algorithm 832: UMFPACK V4.3—an unsymmetric-pattern multifrontal method. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 30(2), 196–199.
- Monk, P. (1993). An analysis of Nédélec’s method for the spatial discretization of Maxwell’s equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 47, 101–121.
- Monk, P. (2003). *Finite element methods for Maxwell’s equations*. Oxford University Press.
- Nédélec, J.-C. (1980). Mixed finite elements in \mathbb{R}^3 . *Numerische Mathematik*, 35, 315–341.
- Whitney, H. (1957). *Geometric integration theory*. Princeton: Princeton University Press.
- Yee, K. S. (1966). Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell’s equations in isotropic media. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 14, 302–309.