

Numerische Simulation einer Permittivitätssonde zur Messung der elektrischen Eigenschaften planetarer Regolithe

M. Panzner¹, F. Sohl², K. Spitzer¹

Zusammenfassung

Diese Arbeit hat die simulationstechnische Begleitung einer Sondenentwicklung zur Messung der elektrischen Eigenschaften - Leitfähigkeit und Dielektrizitätszahl - planetarer Regolithe (Mars, Mond, Merkur) zum Inhalt. Die hardwaretechnische Entwicklung wird von der Europäischen Raumagentur ESA und dem Deutschen Zentrum für Luft- und Raumfahrt DLR durchgeführt. In einem ersten Ansatz konnten wir ein Finite-Elemente-Simulationsprogramm auf der Basis von unstrukturierten, adaptiven Dreiecksgittern für beliebige zweidimensionale axialsymmetrische Verteilungen der Leitfähigkeit und Dielektrizität entwickeln, das die Sondenometrie beinhaltet und den gewählten quasistatischen Ansatz im Frequenzbereich von 10^2 Hz bis 10^6 Hz für elektrische Leitfähigkeiten $< 10^2$ S/m validiert. Mögliche induktive Effekte finden in der Simulation volle Berücksichtigung. Als nachvollziehbares Beispiel einer heterogenen Verteilung der elektrischen Größen wird eine vertikale Sondenfahrt durch eine eingelagerte Schicht simuliert. Abschließend werden im Hinblick auf eine zukünftige Dateninversion räumliche Verteilungen der komplexen Sensitivität vorgestellt.

Einleitung

Kürzlich wurde von der japanischen Raumsonde Hayabusa erstmals eine Bodenprobe an der Oberfläche eines nur wenige hundert Meter großen Kleinplaneten entnommen, die zur weiteren Analyse im Jahr 2007 unversehrt an der Erdoberfläche abgesetzt werden soll. Während die oberflächennahen Schichten von Mars und Erdmond, welche hauptsächlich aus porösem, unverfestigtem Material (Regolith) bestehen, bereits in der Vergangenheit mit Hilfe stationärer und mobiler Landegeräte näher untersucht werden konnten (?), stehen derartige Erkundungen für den sonnennächsten Planeten Merkur noch aus. Nicht zuletzt aufgrund möglicher astrobiologischer Fragestellungen wird hierbei der Suche nach flüchtigen Bestandteilen (Wasser, Eis, Klathrate) im Untergrund erhebliches Interesse beigemessen. Die vergleichende Betrachtung planetarer Regolithe, die von unterschiedlich beschaffenen Körpern stammen, trägt darüber hinaus zu einem besseren Verständnis der frühen Entwicklung des inneren Sonnensystems bei.

¹Institut für Geophysik - TU Bergakademie Freiberg, Gustav-Zeuner-Str. 12, 09596 Freiberg, Email: klaus.spitzer@geophysik.tu-freiberg.de

²Institut für Planetenforschung - Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e.V. (DLR), Rutherfordstrasse 2, D-12489 Berlin, Email: Frank.Sohl@dlr.de

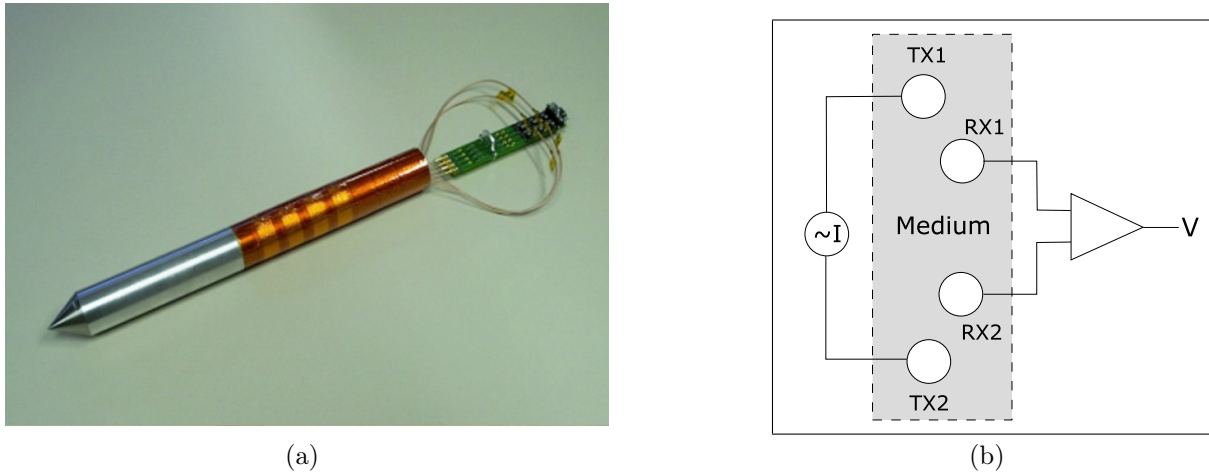


Abbildung 1: a) Prototyp einer Permittivitätssonde nach Hamelin et al. (2003)
 b) Prinzipskizze der Messsonde. Das System besteht aus einem Sendelektrodenpaar TX mit Stromgenerator und einem Messelektrodenpaar RX mit einer Messbrücke zur Bestimmung des Potentials in Betrag und Phase.

Die chemischen und physikalischen Eigenschaften planetarer Lockermaterialien (Ksanformaliti, 2001) wirken sich in besonders charakteristischer Weise auf die Messungen der komplexen Leitfähigkeit $\tilde{\sigma}$ im Frequenzbereich aus, die von der elektrischen Leitfähigkeit und der dielektrischen Polarisierbarkeit des Materials kontrolliert wird. Von Trautner und Grard (2002) wurde eine Sonde (Abb. 1(a)) zur Messung der elektrischen Leitfähigkeit σ und der relativen Permittivität ε_r vorgestellt, die durch einen Schlagmechanismus in den Boden getrieben wird (Mole). Numerische Simulationen sollen nun die Entwicklung begleiten und Experimente, die bisher maßgeblich im Labor ausgeführt wurden, synthetisch erweitern.

Die Messkonfiguration entspricht einer klassischen Wenner-Vierpolanordnung (Abb. 1(b)). Über das äußere Sendelektrodenpaar (TX) wird ein Wechselstrom kapazitiv in das die Sonde umgebende Medium eingespeist. Mit den beiden inneren Messelektroden (RX) wird das durch den Strom hervorgerufene elektrische Potential in Betrag und Phase gemessen. Für die Auswertung der Messung wird die quasistatische Näherung vorausgesetzt. Mit dem erweiterten Ohmschen Gesetz $\vec{j} = (\sigma + i\omega\varepsilon_0\varepsilon_r) \nabla V$, wobei \vec{j} die Stromdichte, ω die Kreisfrequenz, ε_0 die Dielektrizitätskonstante, V das elektrische Potential und i die imaginäre Einheit darstellen, erhält man die scheinbaren Größen

$$\varepsilon_r^a = \frac{\Delta V_0}{\Delta V} \cos(\phi_0 - \phi) \quad (1)$$

$$\sigma^a = -\frac{\Delta V_0}{\Delta V} \omega \varepsilon_0 \sin(\phi_0 - \phi), \quad (2)$$

wobei ΔV_0 für die Potentialdifferenz zwischen den beiden Messelektroden und ϕ_0 für die Phase stehen, wenn sich die Sonde für eine Referenzmessung im Vakuum befindet. ΔV und ϕ sind Potentialdifferenz und Phase für eine Messung in einem leitfähigen dielektrischen Medium.

Grundlagen der numerische Simulation

Mit Hilfe der numerischen Simulation können das Hardware- und Experimentaldesign optimiert und die physikalischen Phänomene im Bereich der Sonde untersucht werden. So ist es notwendig, den Gültigkeitsbereich des quasistatischen Ansatzes für die Auswertung der Messung zu überprüfen. Bei bestimmten Kombinationen von Frequenz- und Leitfähigkeit können induktive Effekte auftreten, die diese Voraussetzungen verletzen und das Messergebnis verfälschen. Ebenso gilt es, den Einfluss der extrem leitfähigen Sondenelektroden auf das elektrische/elektromagnetische Feld im Umfeld der Sonde zu untersuchen. Des Weiteren können hardware-spezifische Größen wie Auflösungsvermögen, Eindringtiefe, Sensitivität gegenüber Parameteränderungen und der Einfluss der Ankopplung der Sonde an das umgebende Medium ermittelt und analysiert werden.

In einem ersten Ansatz haben wir ein kommerzielles Entwicklungspaket für Finite-Elemente-Formulierungen (Femlab/Matlab) verwendet und ein 2D-axialsymmetrisches Modell erstellt, welches die Geometrie der Permittivitätssonde beinhaltet. Die der Finite-Elemente-Modellierung zu Grunde liegenden Differentialgleichungen wurden so gewählt, dass induktive Effekte berücksichtigt werden. Die elektrische Feldstärke \vec{E} und die magnetische Flussdichte \vec{B} werden über das magnetische Vektorpotential \vec{A} und das elektrische Skalarpotential V formuliert:

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \quad (4)$$

Um die Ausbreitung von niederfrequenten elektromagnetischen Feldern in einem quellenfreien und leitfähigen polarisierbaren Medium vollständig zu beschreiben, müssen die um den Verschiebungsstrom erweiterte Kontinuitätsgleichung (5) und das Ampèresche Gesetz (6) erfüllt sein. Im Frequenzbereich gilt somit außerhalb der Quellen:

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0 = \nabla \cdot [(\sigma + i\omega\varepsilon_0\varepsilon_r)\nabla V] \quad (5)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} = (\sigma + i\omega\varepsilon_0\varepsilon_r)\nabla V, \quad (6)$$

wobei \vec{H} die magnetische Feldstärke, μ_0 die Induktionskonstante und μ_r die relative magnetische Permeabilität sind. Durch Einsetzen der Gleichungen (3) und (4) in die Gleichungen (5) und (6) kann mit $\vec{B} = \mu_r\mu_0\vec{H}$ ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem abgeleitet werden:

$$-\nabla \cdot \left[(i\omega\sigma - \omega^2\varepsilon_0\varepsilon_r)\vec{A} + (\sigma + i\omega\varepsilon_0\varepsilon_r)\nabla V \right] = 0 \quad (7)$$

$$(i\omega\sigma - \omega^2\varepsilon_0\varepsilon_r)\vec{A} + \nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0\mu_r} \nabla \times \vec{A} \right) + (\sigma + i\omega\varepsilon_0\varepsilon_r)\nabla V = 0, \quad (8)$$

welches die Grundlage für die Finite-Elemente-Formulierung darstellt. Um die Eindeutigkeit der Lösung dieses Differentialgleichungssystems zu gewährleisten, wird eine Coulomb Eichung $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ vorgenommen. Gleichung (7) wird mit einer skalaren Testfunktion

γ und Gleichung (8) mit einer vektoriellen Testfunktion $\vec{\tau}$ multipliziert. Durch anschließende Integration über das Gebiet Ω erhält man die so genannte Schwache Form des Finite-Elemente-Ansatzes. Mit $\tilde{\sigma} = \sigma + i\omega\varepsilon_0\varepsilon_r$ und $\mu = \mu_0\mu_r$ lautet diese:

$$\int_{\Omega} \nabla \gamma \cdot (i\omega \tilde{\sigma} \vec{A} + \tilde{\sigma} \nabla V) d\Omega - \int_{\Gamma} \gamma \vec{j}_n \cdot d\vec{\Gamma} = 0 \quad (9)$$

$$\int_{\Omega} \vec{\tau} \cdot [i\omega \tilde{\sigma} \vec{A} + \tilde{\sigma} \nabla V] d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \times \vec{\tau} \cdot \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \right) d\Omega + \int_{\Gamma} \vec{\tau} \cdot \left[\vec{n} \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \right) \right] d\vec{\Gamma} = 0 \quad (10)$$

Gesucht sind die Lösungen V und \vec{A} , so dass die Gleichungen (9) und (10) für alle Testfunktionen γ und $\vec{\tau}$ erfüllt sind. Die Integrale über den Rand Γ des Gebietes Ω in den Gleichungen (9) und (10) werden über die natürlichen Randbedingungen für die Normalkomponente der elektrischen Stromdichte $\vec{j}_n = \tilde{\sigma} \partial_n V + i\omega \tilde{\sigma} \vec{A}$ und die Tangentialkomponente des Magnetfeldes $\vec{n} \times \vec{H} = \vec{n} \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \right)$ definiert, wobei \vec{n} die nach außen gerichtete Flächennormale auf dem Rand ist.

Mit dem Übergang zu endlichdimensionalen Funktionenräumen für die Ansatz- und Testfunktionen folgt aus den Gleichungen (9) und (10) nach der Methode der Finiten-Elemente (Jin, 1993) ein lineares Gleichungssystem, dessen Lösung die gesuchten Größen V und \vec{A} enthält.

Die Quellströme werden über inhomogene Neumann-Randbedingungen für das elektrische Potential an den Rändern der Stromelektroden (TX) vorgegeben. Durch Verwendung von gemischten Randbedingungen für das elektrische Potential und das magnetische Vektorpotential an den äußeren Rändern konnte deren Einfluss auf das Modellierungsergebnis wesentlich reduziert werden.

Im Kontaktbereich der Sondenelektroden existieren sehr hohe Leitfähigkeitskontraste, die dort große Gradienten im elektrischen Potential erzeugen. Um trotzdem eine möglichst genaue numerische Lösung für das elektrische Potential in diesem Bereich zu erhalten, wurde das unstrukturierte Dreiecksgitter in der Nähe der Elektroden adaptiv stark verfeinert (Abb. 2). Der Modellbereich um die Elektroden ist von besonderem Interesse, da für die Simulation einer Messung das Potential an den Messelektroden (RX) abgefragt wird.

Wie in Abbildung 3(b) dargestellt, zeigen die Simulationsergebnisse für das Modell eines vertikalen elektrischen Dipols (VED) gute Übereinstimmung mit den dafür existierenden analytischen Lösungen in homogenen Medien (Telford, 1990) (Abb. 3(a)).

Ergebnisse

Im Frequenzbereich von $10^2 \text{ Hz} < f < 10^6 \text{ Hz}$ konnte für eine beliebige heterogene Parameterverteilung eine stabile Modellantwort berechnet werden. Für Frequenzen $f < 10^2 \text{ Hz}$ ist

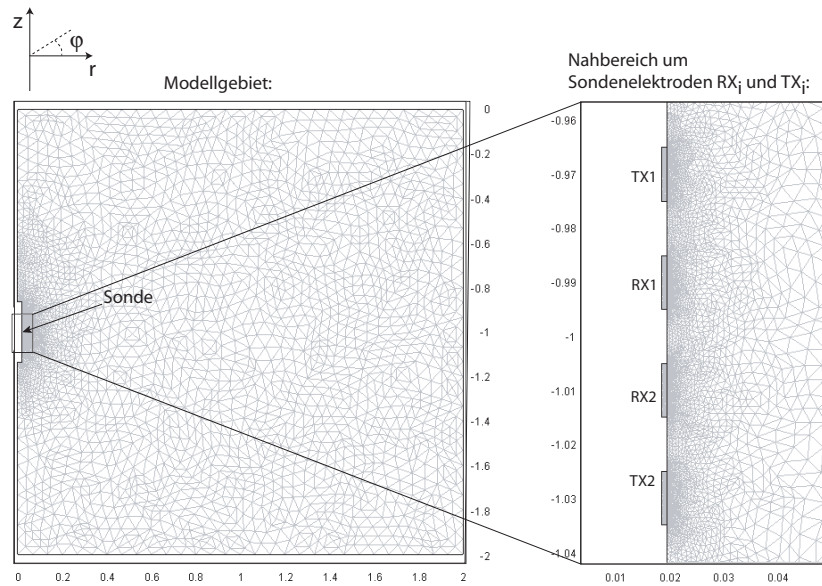


Abbildung 2: Diskretisierung des Modellgebietes. Im Bereich der Sondenelektroden wurde das Gitter adaptiv stark verfeinert.

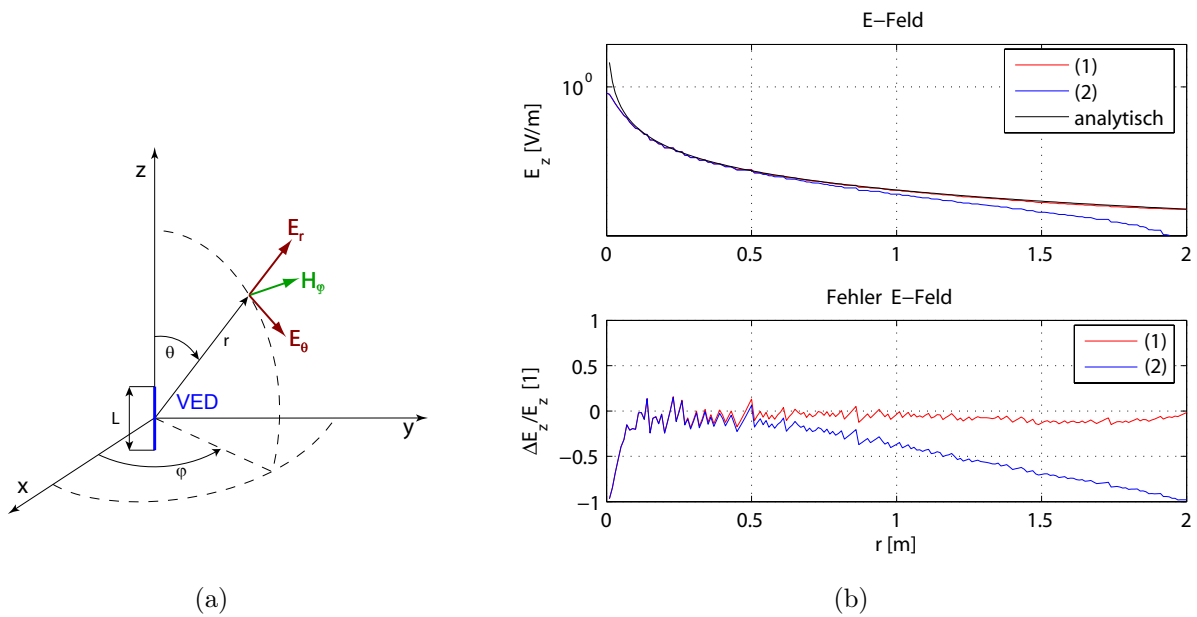


Abbildung 3: a) Schematische Darstellung eines VED b) Darstellung der z-Komponente des elektrischen Feldes \vec{E}_z in der Äquatorialebene als Funktion des Abstandes r zum Dipolmittelpunkt für (1) gemischte Randbedingungen und (2) Dirichlet-Randbedingungen. Durch Implementation von gemischten Randbedingungen erhält man höhere Genauigkeiten bis zum Rand. Abweichungen treten lediglich in der Nähe der Singularität auf.

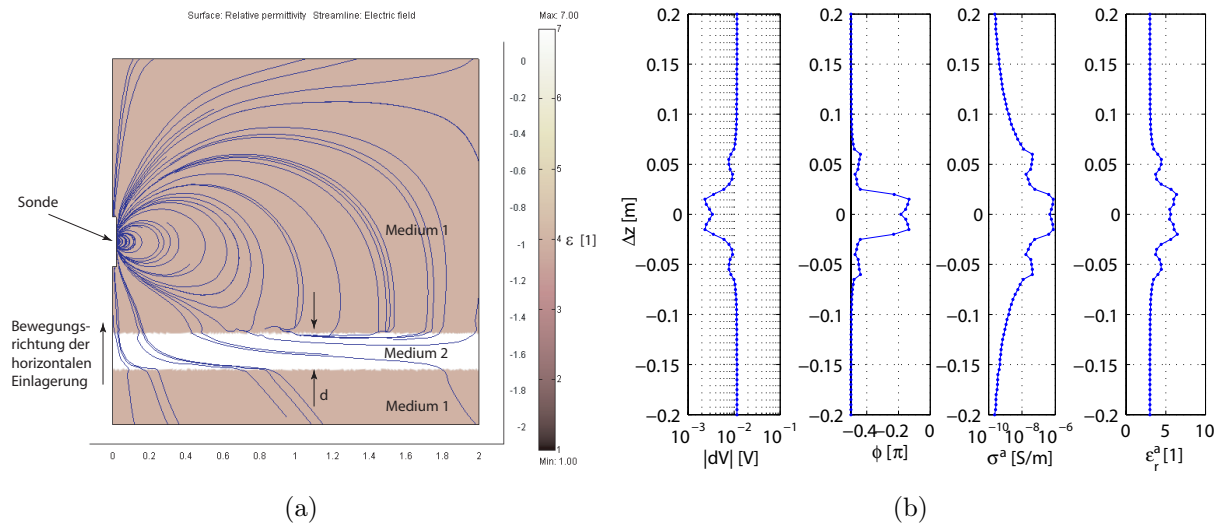


Abbildung 4: a) Simulation einer Sondenfahrt durch ein Modell mit einer eingelagerten Schicht abweichender elektrischer Parameter. Die Position dieser Schicht wird in z-Richtung variiert. b) Darstellung von Potentialdifferenz ΔV und Phase ϕ zwischen den Messelektroden RX für verschiedene Positionen Δz eines Horizontes der Dicke d relativ zur Sondenmitte; Modellvorgaben: Medium 1: $\sigma = 10^{-10}$ S/m, $\epsilon_r = 4$; Medium 2: $\sigma = 10^{-6}$ S/m, $\epsilon_r = 7$, $d = 0.05$ m

das Problem schlecht konditioniert und nicht mehr numerisch stabil lösbar. Bei Frequenzen $f > 10^6$ Hz verliert der hier verwendete Ansatz seine Gültigkeit, da Wellenphänomene die Ausbreitung der elektromagnetischen Felder dominieren.

Der quasistatische Ansatz (Gl. 1 - 2) für die Auswertung der Messung wurde für Leitfähigkeiten $\sigma < 10^{-2}$ S/m validiert. Im betrachteten Frequenzbereich von 10^2 Hz $< f < 10^6$ Hz gilt das Prinzip der kleinen Induktionszahlen B (Benderitter et al., 1994), wonach induktive Effekte für $B \ll 1$ vernachlässigbar klein sind. Die Induktionszahl $B = L/\tau$ ist über die Skalenlänge der Messung L und die elektromagnetische Eindringtiefe τ definiert.

Für die Bestimmung von geschichteten Einlagerungen aus den während einer Sondenfahrt gesammelten Messdaten ist es unbedingt notwendig, die Signatur einer solchen horizontalen Einlagerung zu kennen. Dazu wurde eine vertikale Sondenfahrt simuliert und ein synthetisches Messprofil aufgezeichnet (die linken beiden Subplots in Abb. 4(b)). Um den Einfluss der Ränder auf das Simulationsergebnis zu minimieren, bleibt die Sonde fest in der Mitte des Modells und die Position des Horizontes mit abweichenden elektrischen Parametern wird relativ zur Sonde verändert (Abb. 4(a)). Den rechten beiden Subplots der Abbildung 4(b) ist zu entnehmen, dass die Bestimmung von ϵ_r^a und σ^a nach Gl. (1) und (2) hinreichend gut gelingt. Eine Auflösungsstudie hat darüber hinaus gezeigt, dass Schichten der Dicke $d > 2$ cm mit der Sonde nach Hamelin et al. (2003) gut aufgelöst werden können (ohne Abb.).

Die Berechnung der Sensitivitäten über die Perturbationsmethode (Abb. 5 - 6) zeigt, dass die Wirtiefe, d.h. der Modellbereich, der das Messsignal maßgeblich beeinflusst, in

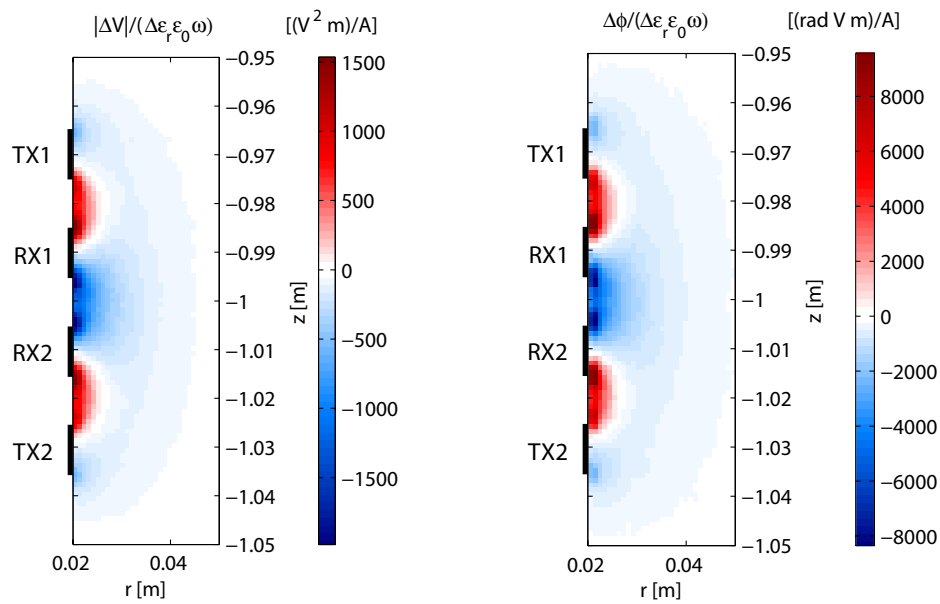


Abbildung 5: Darstellung der Sensitivitäten des Betrages $|\Delta V|$ und der Phase ϕ des Messsignals gegenüber Änderungen der relativen Permittivitätszahl ϵ_r bei $f = 1 \text{ kHz}$; Modellhintergrund: $\sigma = 10^{-8} \text{ S/m}$ und $\epsilon_r = 4$. Der jeweilige Modellparameter wurde lokal um $\delta = 5\%$ geändert.

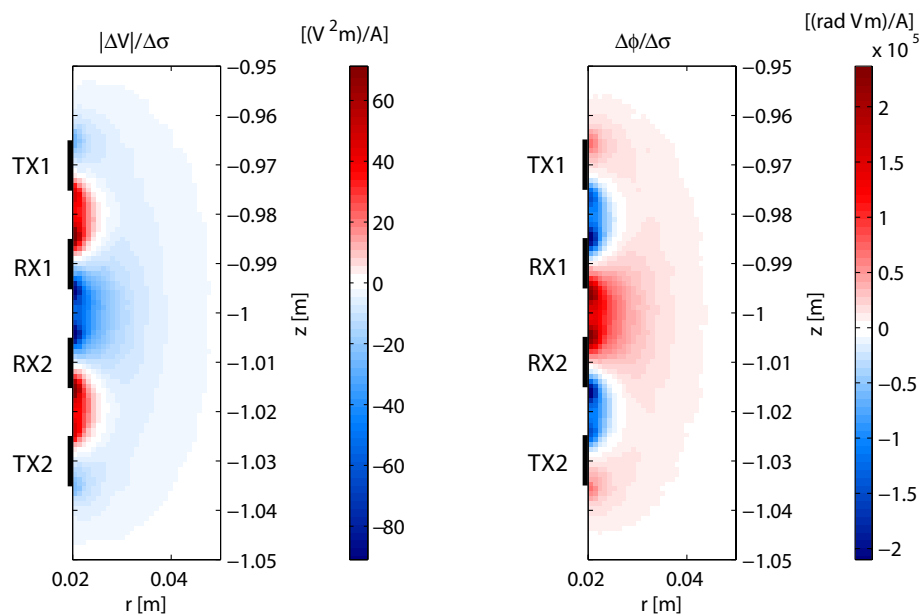


Abbildung 6: Darstellung der Sensitivitäten des Betrages $|\Delta V|$ und der Phase ϕ des Messsignals gegenüber Änderungen der elektrischen Leitfähigkeit $\Delta\sigma$ bei $f = 1 \text{ kHz}$; Modellhintergrund: $\sigma = 10^{-8} \text{ S/m}$ und $\epsilon_r = 4$. Der jeweilige Modellparameter wurde lokal um $\delta = 5\%$ geändert.

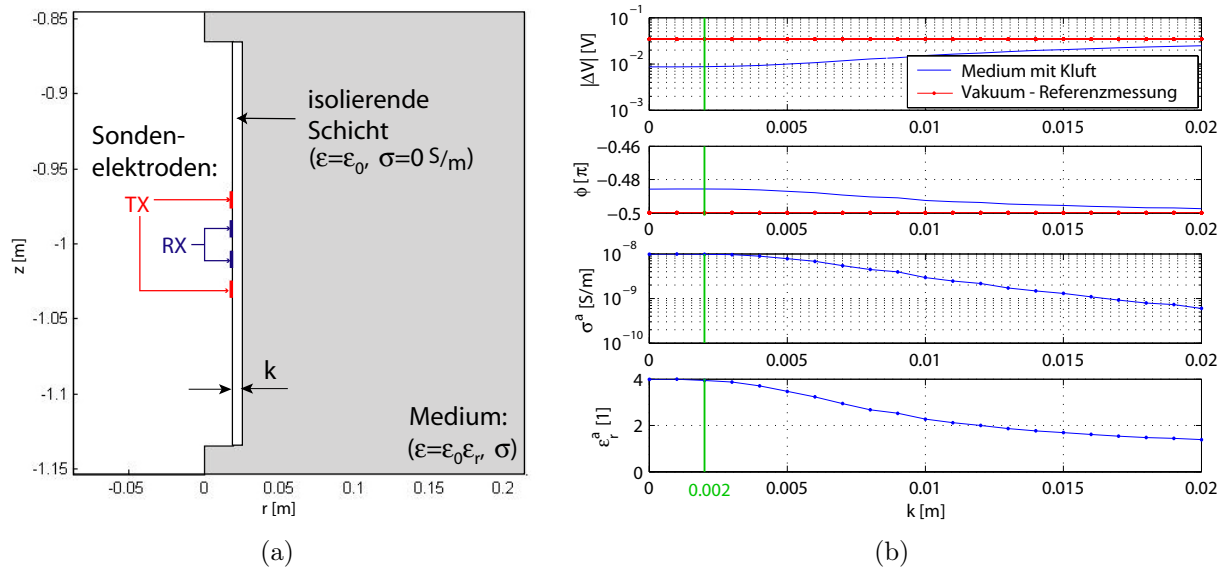


Abbildung 7: a) Die Sonde wird durch eine Kluft der Breite k vom umgebenden Medium getrennt. b) Darstellung der Simulationsergebnisse für Potentialdifferenz zwischen den RX -Elektroden $|\Delta V|$ und Phase ϕ sowie daraus abgeleitete Parameter ϵ_r^a und σ^a als Funktion der Kluftbreite k zwischen Sonde und Medium. Bei $k < 2$ mm sind die Fehler bei der Bestimmung von ϵ_r^a und σ^a kleiner 2%. Modellvorgaben: $\sigma = 10^{-8}$ S/m, $\epsilon_r = 4$.

etwa dem Abstand der Messelektroden entspricht. Die Beträge der ermittelten Sensitivitäten zeigen deutlich, dass der Betrag der zwischen den Messelektroden (RX) messbaren Spannungsdifferenz ΔV maßgeblich von der relativen Permittivität des umgebenden Mediums beeinflusst wird, während der Phasenwinkel ϕ des Messsignals sehr sensitiv für Variationen in der elektrischen Leitfähigkeit ist.

Eine schmale räumliche Kluft (Abb. 7(a)) mit den elektrischen Eigenschaften $\sigma = 0$ S/m und $\epsilon = \epsilon_0$ zwischen Sonde und umgebendem Material verfälscht die Messung nur unwesentlich, obwohl sich die Kluft im hochsensitiven Bereich der Messung befindet. Eine solche Kluft könnte sich z.B. beim Einrammen der Sonde in heterogenes Material bilden und soll im Sinn einer schlechten Ankopplung verstanden werden. Unsere Simulationsergebnisse haben gezeigt, dass bei Klüften der Breite $k < 2$ mm der Fehler bei der Bestimmung von σ^a und ϵ_r^a bei unter 2% liegt (Abb. 7(b)).

Ausblick

Perspektivisch möchten wir Simulationen für beliebige dreidimensionale Verteilungen der elektrischen Leitfähigkeit σ und der dielektrischen Permittivität ϵ , sowie Machbarkeitsstudien im Hinblick auf eine zwar eingeschränkte, aber dennoch mögliche Dateninversion durchführen. Diese könnte durch die gezielte Positionierung von einer sehr kleinen Anzahl von Elektroden (z.B. am Landefahrzeug) möglich werden. Eine grobe räumli-

che Rekonstruktion der elektrischen Parameter würde zusätzliche Informationen über die Heterogenität des Oberflächenmaterials terrestrischer Planeten liefern und Fragen im Zusammenhang der planetaren Entwicklungsgeschichte beantworten helfen.

Literatur

- Benderitter, Y., Jolivet, A., Mounir, A., und Tabbagh, A. (1994). Application of the electrostatic quadripole to sounding in the hectometric depth range. *Journal of Applied Geophysics*, 31, 1-6.
- Hamelin, M., Trautner, R., und Grard, R. (2003). Detection of near-surface ice on mars with electromagnetic techniques on board future surface vehicles. *Journal of Geophysical Research*, 108, 8045–8055.
- Jin, J. (1993). *The finite element method in electromagnetics*. John Wiley and Sons, Inc.
- Ksanfomaliti, L. V. (2001). Physical properties of the hermean surface (a review). *Solar Systems Research*, 35, 339-353.
- Telford, W. (1990). *Applied geophysics*. Cambridge University Press.
- Trautner, R., und Grard, R. (2002). Measuring the electric properties of planetary environments with mutual impedance (MI) probes. *Earth-like planets and moons. Proceedings of the 36th ESLAB Symposium*, 10, 105-107.