

Modellierung der Induktionseffekte von Meeresströmungen mit Hilfe dünner Schichten

Peter Weidelt

Institut für Geophysik und Meteorologie, TU Braunschweig

e-mail: p.weidelt@tu-bs.de

1. Einleitung

Seit der überraschenden Entdeckung von Gezeiteneffekten der M_2 -Tide in den Magnetfelddaten des Satelliten CHAMP (Tyler et al., 2003) haben die Induktionseffekte von Gezeiten wieder zunehmendes Interesse gefunden. In den ersten Modellierungen wird nur die Verteilung von Kontinenten und Ozeanen betrachtet, die Induktion in Unterkruste und Mantel bleibt unberücksichtigt. Da die Leitfähigkeit im Oberen Mantel niedrig ist und die relativ kurze Periode von 12 Stunden nicht die höherleitenden Bereiche des mittleren Mantels erreicht, sind bei zusätzlicher Berücksichtigung der Mantelleitfähigkeit tatsächlich keine entscheidenden Modifikationen zu erwarten. Trotzdem soll hier über die allerersten Ergebnisse berichtet werden, ein vorhandenes sphärisches Dünnschichtprogramm für die Gezeitenmodellierung zu modifizieren.

Es erweist sich als zweckmäßig, die Leitfähigkeitsverteilung $\sigma(\mathbf{r})$ in einen normalen, nur radial variablen Anteil $\sigma_n(r)$ und einen lateral variablen - auf die Erdoberfläche $r = a$ beschränkten - anomalen Anteil $\sigma_a(\mathbf{r})$ zu zerlegen,

$$\sigma(\mathbf{r}) = \sigma_n(r) + \sigma_a(\mathbf{r}), \quad \sigma_a(\mathbf{r}) = \tau_a(\mathbf{r})\delta(r - a).$$

$\sigma_n(r)$ enthält einen normalen Oberflächenleitwert τ_n , der zusammen mit $\tau_a(\mathbf{r})$ die Modellierung von Ozeanen und Kontinenten erlaubt.

Die Magnetfeldberechnung für das *normale* Problem ($\tau_a = 0$) ist sehr einfach, das *anomale* Problem erfordert die aufwendige Berechnung der Verzerrung des gezeiteninduzierten Stromsystems durch die Kontinente.

Wir wollen im folgenden versuchen, unter Verzicht auf zu viele mathematische Details eine möglichst anschauliche Vorstellung von dem Induktionsvorgang zu geben. Deshalb gehen wir nur schrittweise voran.

2. Der primäre Anteil

Fig. 1 zeigt mit der tiefenintegrierten Strömungsgeschwindigkeit \mathbf{u} zwei grob aufgelöste Momentaufnahmen des Wassertransports in der lunaren M_2 -Tide mit der Periode $T = 12.5$ h. Die untere Abbildung zeigt den Zustand eine Viertelperiode früher. Die Daten stammen aus dem umfangreichen Datensatz ‘Global Inverse Solution TPXO.6.2’ von Egbert (2003). (Zur Vereinfachung der Darstellung werden im folgenden immer nur die zum oberen Zeitpunkt gehörenden Felder gezeigt werden.)

In Gegenwart des Erdmagnetfeldes \mathbf{F} induziert die Gezeitenströmung \mathbf{u} durch die Lorentz-Kraft ein elektrisches Feld $\mathbf{u} \times \mathbf{F}$ und damit im elektrisch leitenden Ozean die tiefenintegrierte Stromdichte = Flächenstromdichte

$$\mathbf{j}_e = \int_0^h \sigma(\mathbf{u} \times \mathbf{F})_s dh. \quad (1)$$

Der Index s bezeichnet die Projektion auf die Kugelschale S . \mathbf{j}_e wird im folgenden als ‘Primärstrom’ bezeichnet.

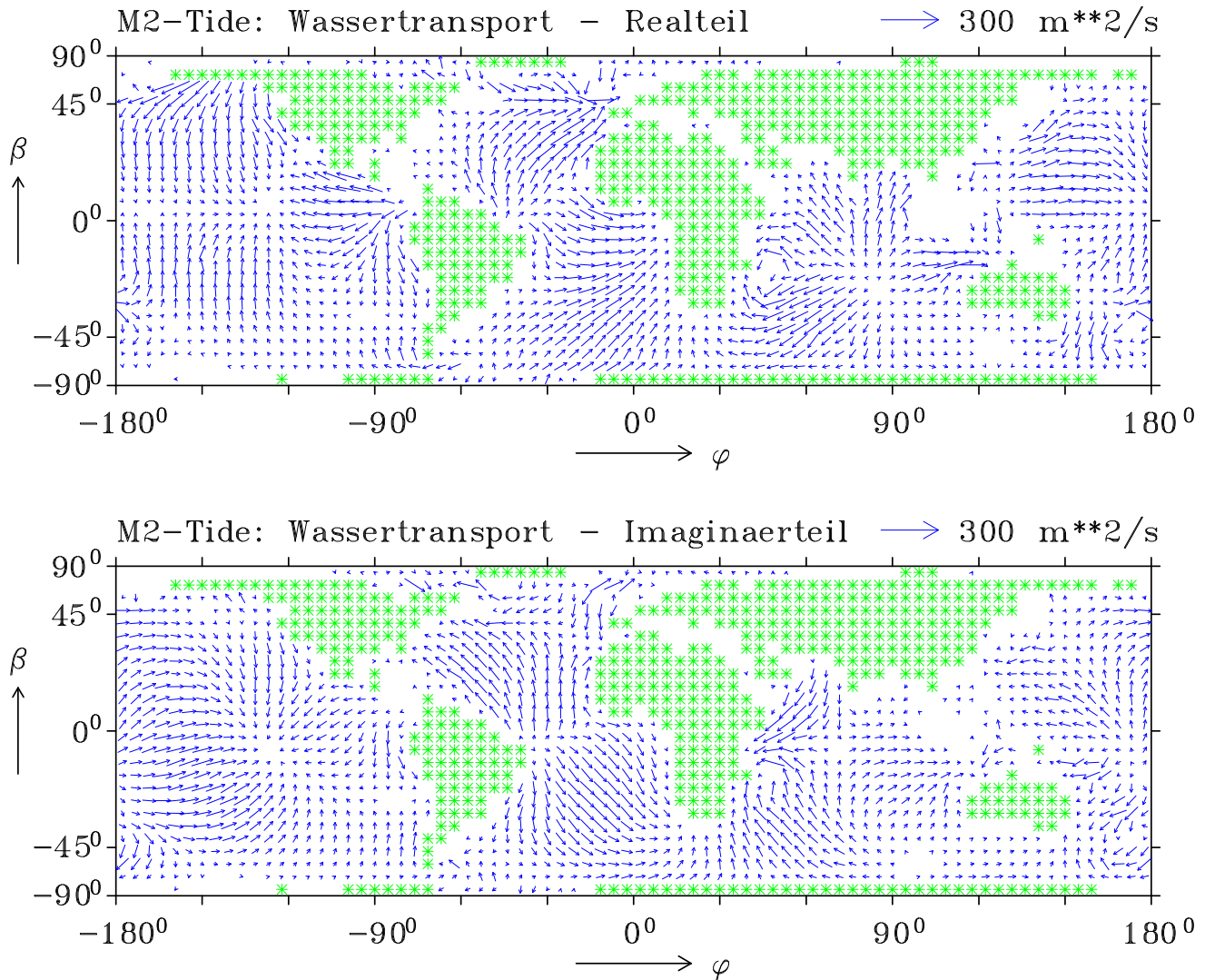


Fig. 1: Tiefenintegrierte Strömungsgeschwindigkeiten der M_2 -Tide. Im Gegensatz zu den Originaldaten von Egbert (2003) mit einer Auflösung von 0.25° wird hier zur Vektordarstellung nur eine grobe Auflösung verwendet. Die untere Darstellung liegt eine Viertelperiode früher.

Im oberen Teil von Fig. 1 erzeugt z.B. im südlichen Indischen Ozean das aus dem Gezeitenberg abfließende Wasser gemäß (1) als Primärstrom einen elektrischen (Flächen-)Stromwirbel im Uhrzeigersinn. Dies ist in der oberen Abbildung von Fig. 2 deutlich zu erkennen. In dieser Abbildung paust sich auch der geomagnetische Äquator durch, auf dem $(\mathbf{u} \times \mathbf{F})_s = \mathbf{0}$ ist.

Der primäre Flächenstrom \mathbf{j}_e läßt sich in einen divergenzfreien oder solenoidalen Anteil (Skalar Ψ_e) und einen rotationsfreien Anteil (Skalar Φ_e) aufteilen:

$$\mathbf{j}_e = \nabla \times (\hat{\mathbf{r}}\Psi_e) + \nabla_s \Phi_e$$

Der Skalar Ψ_e ist die Stromfunktion und die Linien $\Psi_e = \text{const}$ sind die Stromlinien des solenoidalen Anteils. Es gilt

$$\Psi_e(\mathbf{r}_0) = \int_S [\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{j}_e(\mathbf{r})] \cdot \nabla_s \Phi_1(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) df,$$

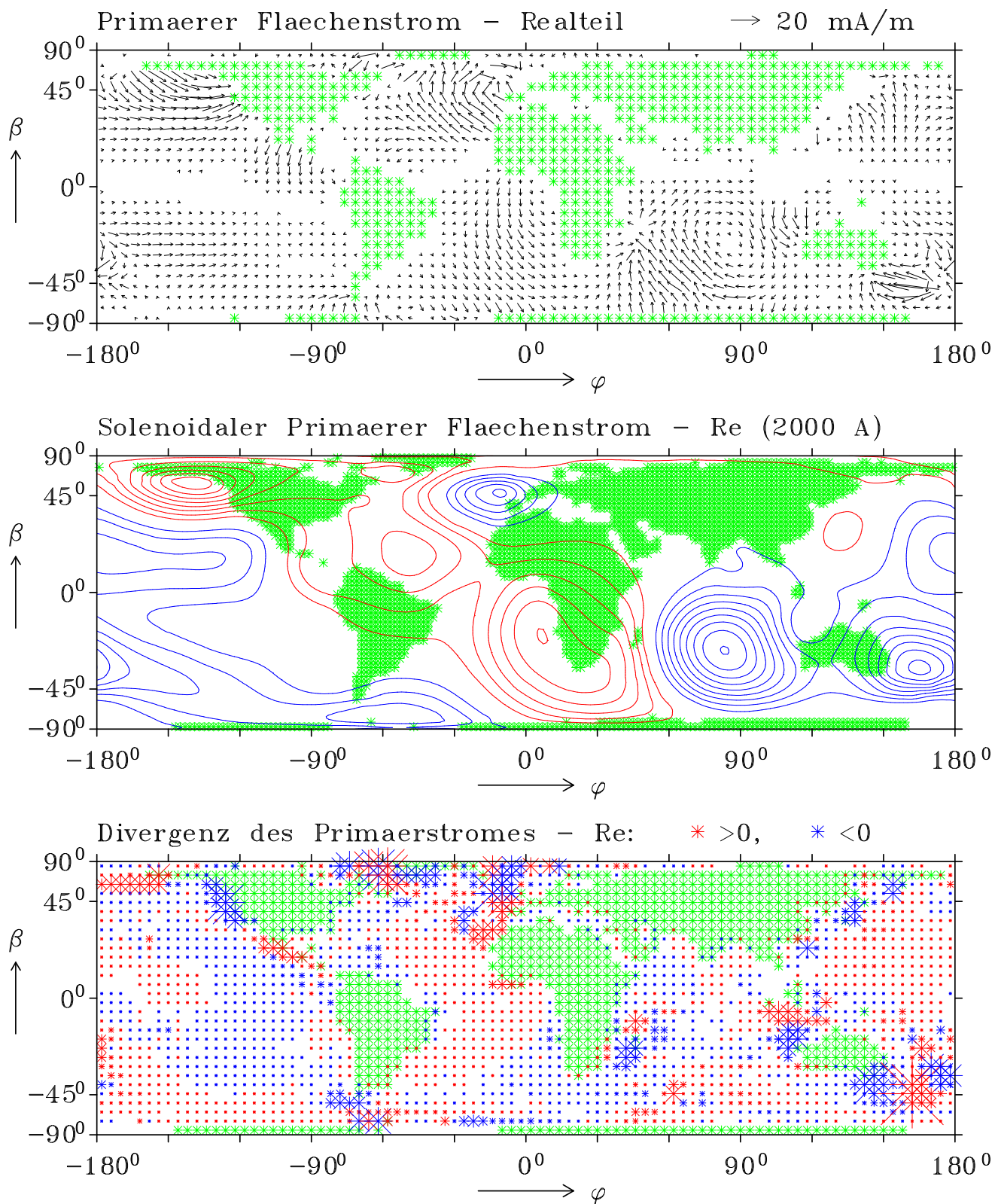


Fig. 2: Der gezeiteninduzierte primäre Flächenstrom (oben) und seine Zerlegung in einen divergenzfreien (= solenoidalen) Anteil (Mitte) und einen divergenten Anteil (unten). Zwischen benachbarten Stromlinien des quellfreien Anteils fließen 2000 A, bei blauen Stromlinien im Uhrzeigersinn, bei roten gegen den Uhrzeiger. Der divergente Anteil wird nur durch seine Quellen (rot) und Senken (blau) dargestellt. – Elektromagnetische Induktion in der Erde spielt noch keine Rolle.

wobei

$$\Phi_1(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \log \left(\frac{1}{1 - \cos \Theta} \right).$$

Θ ist die geozentrische Winkelentfernung zwischen $\mathbf{r} = (r, \theta, \phi)$ und $\mathbf{r}_0 = (r_0, \theta_0, \phi_0)$,

$$\cos \Theta = \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\phi - \phi_0).$$

Der solenoidale Anteil des Primärfeldes ist in dem mittleren Bild von Fig. 2 dargestellt. Die Divergenzen $\nabla_s \cdot \mathbf{j}_e$ zeigt das untere Bild von Fig. 2. Diese Quellen des gezeiteninduzierten Stromes sind Senken des Leitungsstromes, der sich sowohl über Ozeane und Kontinente als auch – bei nichtverschwindender Leitfähigkeit des Substrats – durch Ströme in der Tiefe schließt.

Nur der divergenzfreie (solenoidale) Anteil \mathbf{j}_e erzeugt im Außenraum der Erde ($r_0 \geq a$) ein Magnetfeld. In diesem Abschnitt, in dem nur das Primärfeld betrachtet und Induktion noch ausgeschlossen wird, läßt sich das Magnetfeld einfach nach Biot & Savart berechnen. Die Radialkomponente ist

$$B_{er}(\mathbf{r}_0) = \int_S [\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{j}_e(\mathbf{r})] \cdot \nabla_s \Phi_2(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) df \quad (2)$$

mit

$$\Phi_2(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = \frac{\mu_0 a}{4\pi r_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}.$$

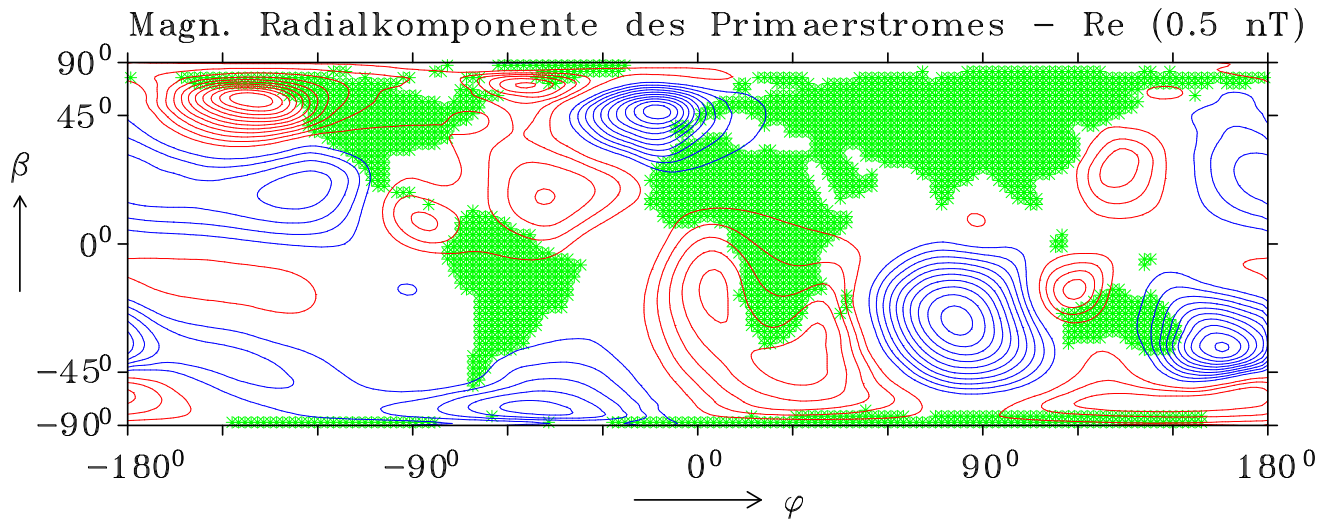


Fig. 3: Die magnetische Radialkomponente des gezeiteninduzierte primären Flächenstroms in Satelitenhöhe $h = 430$ km. Der Isolinienabstand beträgt 0.5 nT. Isolinien $B_r < 0$ sind blau, Isolinien $B_r > 0$ sind rot. Der mit dem abströmende Wasser verbundene Stromwirbel (im Uhrzeigersinn) im südlichen Indischen Ozean erzeugt ein $B_r < 0$. Durch die Berücksichtigung von Induktion in der Erde wird B_r deutlich geschwächt (s. die beiden folgenden Abschnitte).

3. Der normale Anteil

Nun wählen wir eine radialsymmetrische normale Verteilung $\sigma_n(r)$ der elektrischen Leitfähigkeit. Diese besteht aus dem Oberflächenleitwert τ_n mit einer Anzahl von leitenden Schichten darunter. Die Wahl fällt auf das Vierschichtmodell von Olsen (1998, p. 307) mit

$$\begin{aligned} 0 < z < 520 \text{ km} & : 1/\sigma_n = 76 \Omega\text{m} \\ 520 \text{ km} < z < 646 \text{ km} & : 1/\sigma_n = 4.5 \Omega\text{m} \\ 646 \text{ km} < z < 791 \text{ km} & : 1/\sigma_n = 5.9 \Omega\text{m} \\ z > 791 \text{ km} & : 1/\sigma_n = 0.66 \Omega\text{m} \end{aligned}$$

Die Leitwerte der dünnen Oberflächenschicht liegen zwischen den Leitwerten der Kontinente ($\tau_{min} = 500$ S) und den Leitwerten der Tiefsee ($\tau_{max} = 25800$ S). Der Algorithmus zur Lösung der Integralgleichung für den anomalen Anteil (nächster Abschnitt) hat die besten Konvergenzeigenschaften, wenn man τ_n gemäß

$$\frac{1}{\tau_n} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tau_{min}} + \frac{1}{\tau_{max}} \right) \quad (3)$$

festlegt, also $\tau_n = 980$ S.

Der solenoidale Anteil des Normalstromes lautet

$$\mathbf{j}_{sol,n} = \nabla \times (\hat{\mathbf{r}}\Psi_n). \quad (4)$$

Dabei ist Ψ_n die Stromfunktion für den normalinduzierten Anteil, die sich für $\omega = 0$ auf Ψ_e reduziert und gegeben ist durch

$$\Psi_n(\mathbf{r}_0) = \int_S [\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{j}_e(\mathbf{r})] \cdot \nabla_s \Phi_3(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) df,$$

mit

$$\Phi_3(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{2\ell+1}{\ell(\ell+1)} \cdot \frac{\{\ell/a + b_T(\ell, \omega, \sigma_n)\} P_\ell(\cos \Theta)}{\ell/a + i\omega\mu_0\tau_n + b_T(\ell, \omega, \sigma_n)} \quad (5)$$

Die toroidale Übertragungsfunktion b_T koppelt an den normal geschichteten Untergrund an,

$$b_T = \frac{(r f_\ell)'|_{r=a^-}}{a f_\ell(a)}, \quad (r f_\ell)'' = \left[i\omega\mu_0\sigma_n(r) + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] (r f_\ell), \quad f_\ell(r) \rightarrow 0 \quad \text{für } r \rightarrow 0.$$

Für $\tau_n = 0$ ist $\Phi_3 = \Phi_1$.

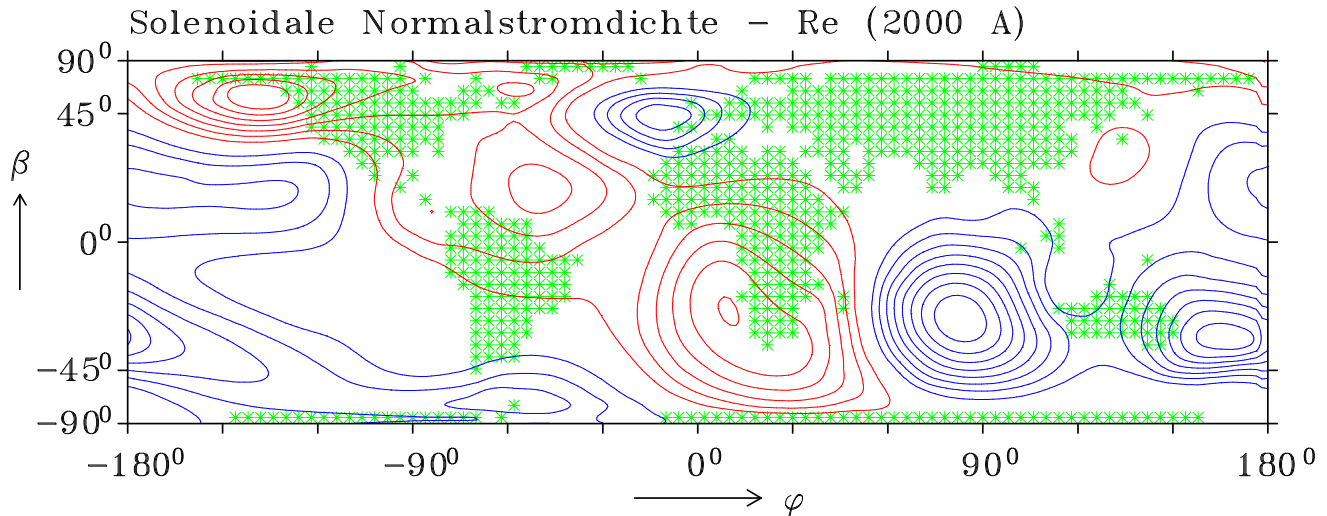


Fig. 4: Stromlinien des solenoidalen Normalstromes in der dünnen Oberflächenschicht. Gegenüber Fig. 2, Mitte, hat sich das Stromsystem nur marginal verändert. (Für $\tau_n = 0$ hätte sich gar nichts geändert.)

Die zugehörige Radialkomponente des normalen Magnetfeldes für $r_0 \geq a$ ist gegeben durch

$$B_{nr}(\mathbf{r}_0) = \int_S [\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{j}_e(\mathbf{r})] \cdot \nabla_s \Phi_4(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) df \quad (6)$$

mit

$$\Phi_4(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi r_0^2} \sum_{\ell=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r_0} \right)^\ell \frac{(2\ell+1) P_\ell(\cos \Theta)}{\ell/a + i\omega\mu_0\tau_n + b_T(\ell, \omega, \sigma_n)}, \quad \Phi_4 = \Phi_2 \quad \text{für } \sigma_n \equiv 0.$$

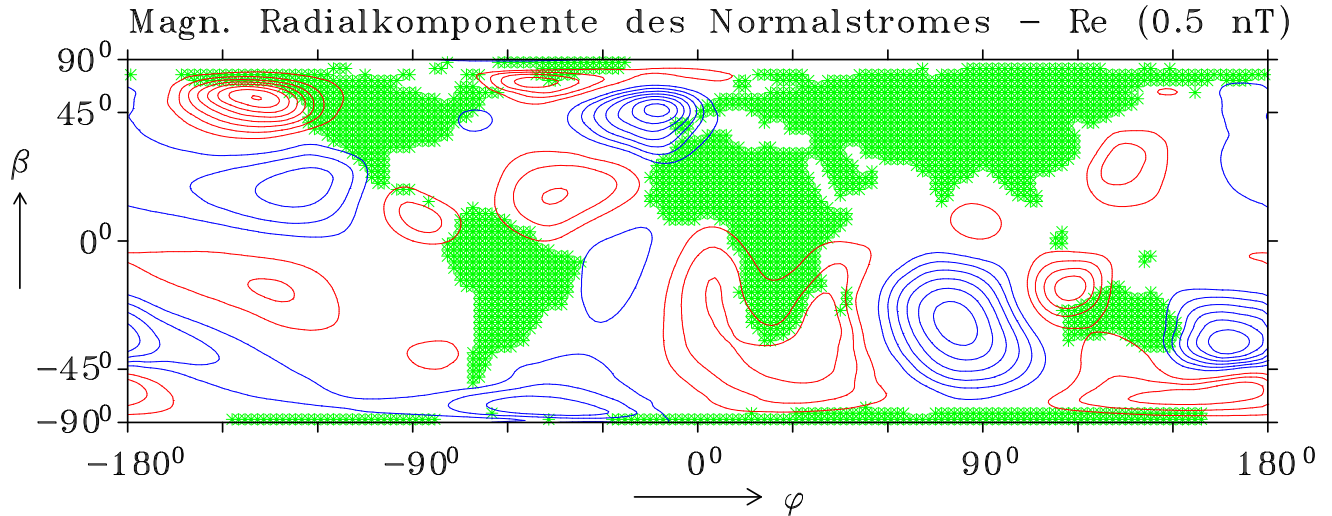


Fig. 5: Die magnetische Radialkomponente des Normalstromes in der Höhe $h = 430$ km. Ein Vergleich mit Fig. 3 zeigt, daß die elektromagnetische Induktion in der normal geschichteten Erde B_r deutlich dämpft. Zu B_r tragen auch die toroidalen Ströme unterhalb der Deckschicht bei.

4. Der anomale Anteil

Bisher wurden nur Felder betrachtet, die sich durch einfache Transformationen aus \mathbf{j}_e ableiten lassen. Wenn man aber den Gesamtstrom berechnen will, in dem die Verzerrungen durch Ladungsanhäufungen an den Gradienten der anomalen Leitwertvariation $\tau_a(\mathbf{r}) = \tau(\mathbf{r}) - \tau_n$ berücksichtigt werden, so ist eine Fredholmsche Vektor-Integralgleichung für die Gesamtflächenstromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ in der Kugelschale $r = a$ zu lösen. Diese Integralgleichung lautet [z.B. Fainberg et al. (1990)]

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}_0) = \mathbf{j}_n(\mathbf{r}_0) + \int_S \frac{\tau_a(\mathbf{r})}{\tau(\mathbf{r})} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \underline{\underline{G}}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) df \quad (7)$$

mit der normalen Flächenstromdichte

$$\mathbf{j}_n(\mathbf{r}_0) = \int_S \mathbf{j}_e(\mathbf{r}) \cdot \underline{\underline{G}}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) df$$

und der Greenschen (2×2)-Dyade

$$\underline{\underline{G}}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = (\nabla \times \hat{\mathbf{r}}) \otimes (\nabla \times \hat{\mathbf{r}}_0) Q_T(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) + \nabla_s \otimes \nabla_{s0} Q_P(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0).$$

Dabei bezeichnet \otimes das dyadische Produkt. Q_T und Q_P sind die Skalarfunktionen für den toroidalen bzw. poloidalen Stromfluß, die nur von der normalen Leitfähigkeitsverteilung $\sigma_n(r)$ abhängen. Es gilt

$$Q_T(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{2\ell+1}{\ell(\ell+1)} \cdot \frac{\{\ell/a + b_T(\ell, \omega, \sigma_n)\} P_\ell(\cos \Theta)}{\ell/a + i\omega\mu_0\tau_n + b_T(\ell, \omega, \sigma_n)} [= \Phi_3(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)]$$

und

$$Q_P(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{2\ell+1}{\ell(\ell+1)} \cdot \frac{\{\sigma_n(a^-)/b_P(\ell, \omega, \sigma_n)\} P_\ell(\cos \Theta)}{\tau_n + \sigma_n(a^-)/b_P(\ell, \omega, \sigma_n)}$$

mit

$$b_P = \frac{(rg_\ell)'|_{r=a^-}}{a g_\ell(a)}, \quad (r g_\ell)'' = \left[i\omega\mu_0\sigma_n + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] (r g_\ell), \quad g_\ell(r) \rightarrow 0 \quad \text{für } r \rightarrow 0.$$

Die Dgl. gilt innerhalb homogener Schichten; an Schichtgrenzen sind $\sigma_n g_\ell$ und $(r g_\ell)'$ stetig.

Insbesondere ist $Q_T(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = \Phi_3(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$ [siehe Gl. (5)], so daß der divergenzfreie Beitrag von \mathbf{j}_n mit dem oben angegebenen $\mathbf{j}_{sol,n}$ [siehe Gl. (4)] identisch ist. Die normale Flächenstromdichte

$$\mathbf{j}_n = \mathbf{j}_e + \tau_n \mathbf{E}_{sn}$$

besteht aus dem gezeiteninduzierten Primärstrom \mathbf{j}_e und dem Leitungsstrom $\tau_n \mathbf{E}_{sn}$. Letzterer ergänzt – zusammen mit den in den Mantel einfließenden vertikalen (poloidalen) Strömen – das divergente \mathbf{j}_e zu einem divergenzfreien System. Es gilt

$$\nabla_s(\mathbf{j}_e + \tau_n \mathbf{E}_{sn}) = J_{nr}(a^-).$$

Dabei ist $J_{nr}(a^-) = \sigma_n(a^-)E_{nr}(a^-)$ die Radialkomponente der normalen Stromdichte unterhalb der dünnen Schicht. Deshalb \mathbf{j}_n ist divergenzfrei, falls die dünne Schicht nicht galvanisch leitend mit dem Mantel verbunden ist [$\sigma_n(a^-) = 0$]. In Übereinstimmung damit ist in diesem Fall $Q_P(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) \equiv 0$.

Die Integralgleichung (7) wird mit der Wahl von τ_n nach (3) gelöst, weil dann $|\tau_a/\tau|$ möglichst klein bleibt. Fig. 6 zeigt oben die resultierende Gesamtstromdichte

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_e + \tau \mathbf{E}_s, \quad (8)$$

in der Mitte den divergenzfreien Anteil $\mathbf{j}_{sol} = \nabla \times (\hat{\mathbf{r}}\Psi)$ mit der Stromfunktion

$$\Psi(\mathbf{r}_0) = \int_S [\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{j}(\mathbf{r})] \cdot \nabla_s \Phi_1(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) df,$$

und unten die Divergenzen $\nabla_s \cdot \mathbf{j}$. Im Vergleich zu Fig. 2 ist das solenoidale Stromsystem schwächer. Die Divergenzen reichen bis in die Kontinente herein, wo die Ströme dann abtauchen.

Die zugehörige Radialkomponente des Magnetfeldes ist

$$B_r(\mathbf{r}_0) = \int_S [\hat{\mathbf{r}} \times \{\mathbf{j}^e(\mathbf{r}) + \tau_a(\mathbf{r}) \mathbf{E}_s(\mathbf{r})\}] \cdot \nabla_s \Phi_2(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) df, \quad (9)$$

$\mathbf{E}_s = (\mathbf{j} - \mathbf{j}_e)/\tau$ [siehe Gl. (8)], und wird in Fig. 7 in der Satellitenhöhe $h = 430$ km dargestellt. Die hohe Leitfähigkeit der Weltmeere führt in der magn. Radialkomponente zu einer Abschwächung. Dies wird deutlich in Fig. 8, in der die meridionalen Mittelwerte der Beträge der komplexwertigen Größen B_r und B_{rn} verglichen werden. Der Amplitudenverlauf stimmt qualitativ mit entsprechenden Ergebnissen von Tyler et al. überein, die Amplituden sind allerdings um etwa 50% größer.

5. Zusammenfassung

Mit Verzicht auf eine ausführliche Ableitung der einzelnen Gleichungen, aber mit der Absicht, ein geophysikalisches Verständnis zu erhalten, wird die Induktion der M_2 -Tide in einem einfachen sphärischen Modell mit einer dünnen inhomogenen Deckschicht modelliert. Es zeigt sich, daß wichtige qualitative Erkenntnisse allein aus Integraltransformationen der primären gezeiteninduzierten Stromdichte \mathbf{j}_e erhalten werden können. Zur Vereinfachung der Darstellung haben wir die Betrachtungen auf die magnetische Radialkomponenten beschränkt, die Tangentialkomponenten lassen sich entsprechend behandeln. Unbefriedigend ist, daß die Amplituden der Radialkomponenten allein schon etwa 50% größer sind als die von Tyler et al. (2003) ermittelten Amplituden des vollständigen magnetischen Vektors. Dies verlangt noch eine genauere Untersuchung.

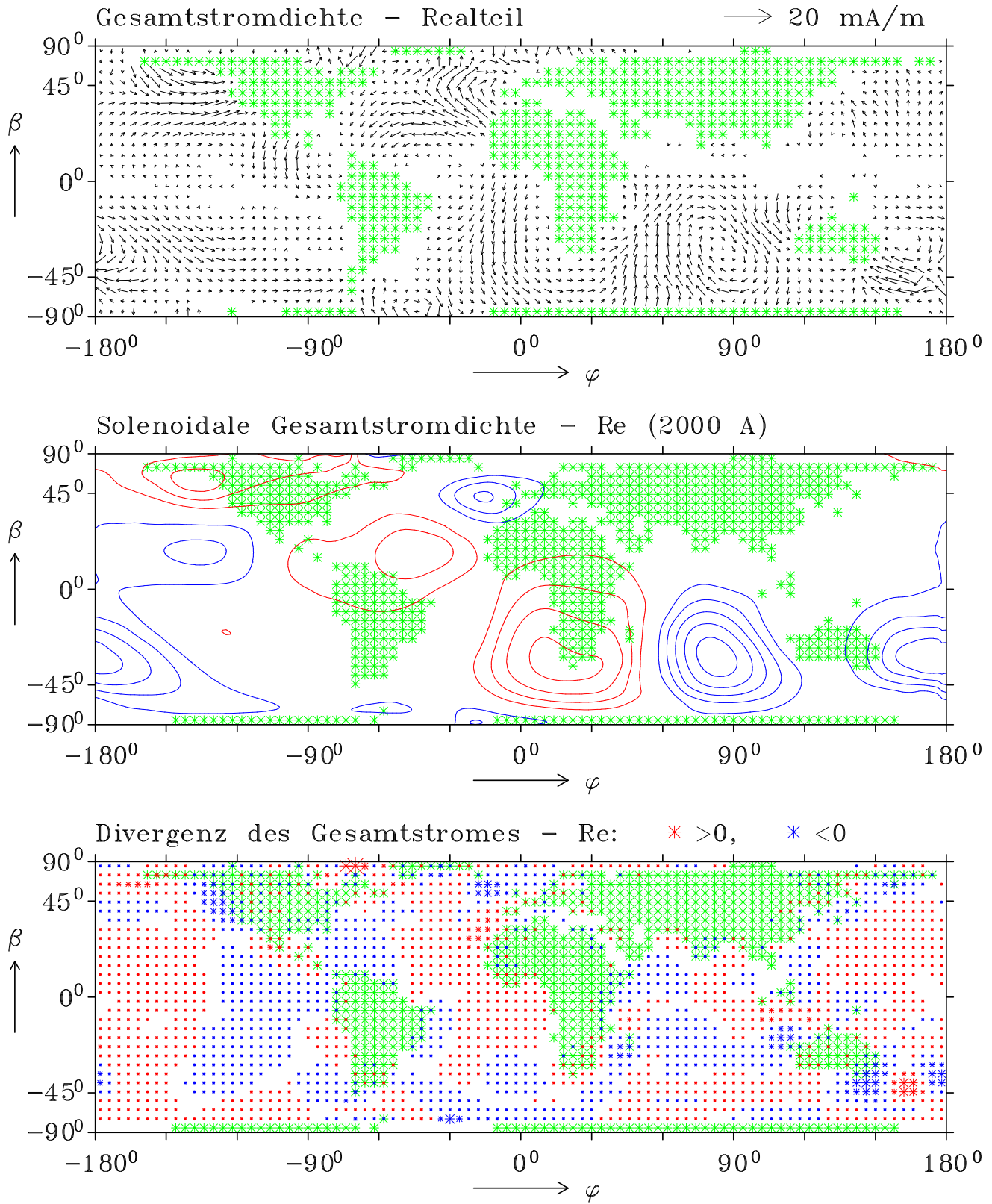


Fig. 6: Der gesamte Flächenstrom (oben) und seine Zerlegung in einen divergenzfreien (= solenoidalen) Anteil (Mitte) und einen divergenten Anteil (unten). Gleiche Bezeichnungen und gleiche Skalierung wie in Fig. 2.

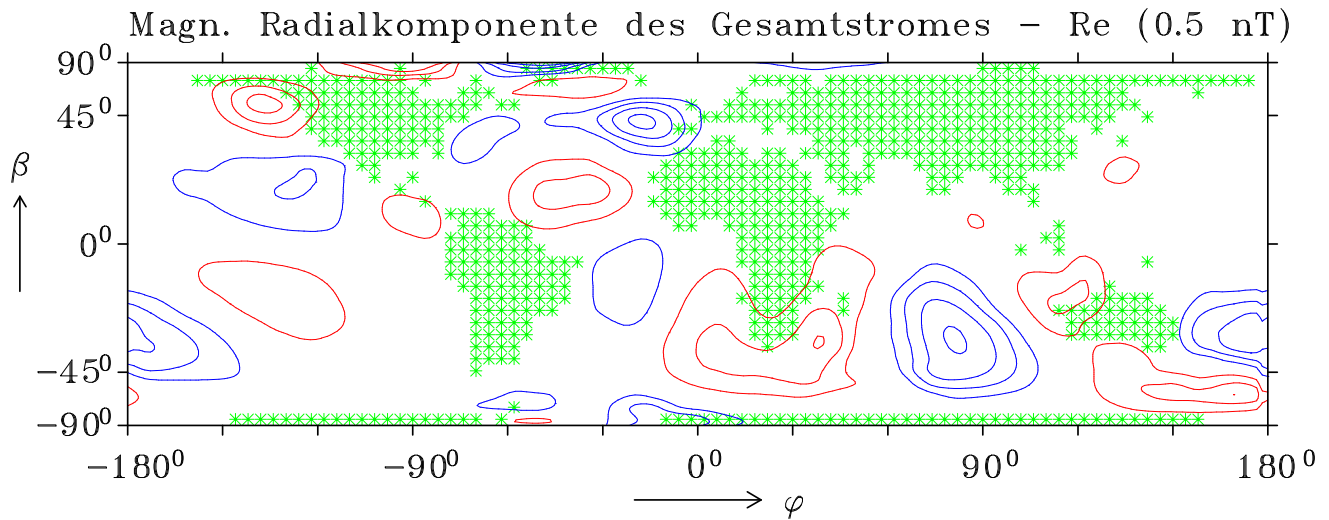


Fig. 7: Magnetische Radialkomponente B_r in Satellitenhöhe. Isolinien $B_r > 0$ sind rot, Isolinien $B_r < 0$ blau.

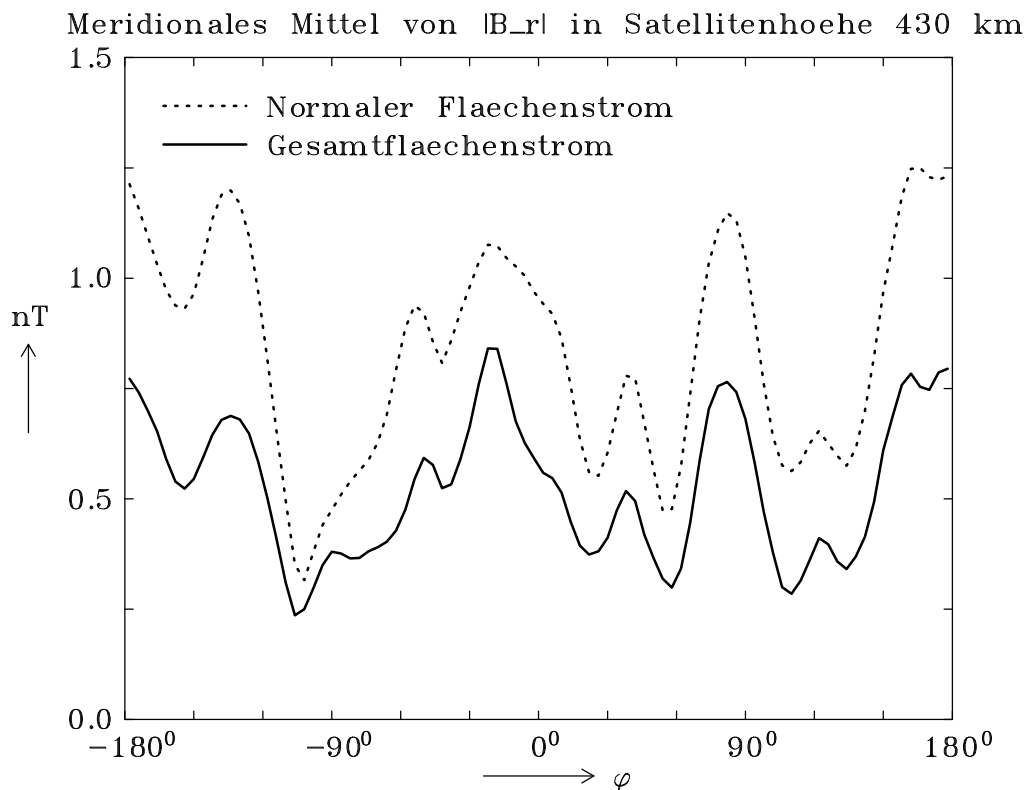


Fig 8: Vergleich der meridionalen Mittelwerte der Beträge der komplexen Amplituden B_{nr} und B_r in Satellitenhöhe.

6. Literatur

- Egbert, G. (2003): Global inverse solution TPXO.6.2, Oregon State University tidal model. (For information: egbert@coas.oregonstate.edu)
- Fainberg, E.B., Kuvshinov, A.V. & Singer, B.Sh. (1990): Electromagnetic induction in a spherical earth with non-uniform oceans and continents in electric contact with the underlying medium. – I. Theory, method and example. *Geophys. J. Int.*, **102**, 273-281.
- Olsen, N. (1998): The electrical conductivity in the mantle beneath Europe derived from C-responses from 3 to 720 hr. *Geophys. J. Int.*, **133**, 298-308.
- Tyler, R.H., Maus, St & Lühr, H. (2003): Satellite observations of magnetic fields due to ocean tidal flow. *Science*, **299**, 239-241.