

# Diffusion der Säkularvariation durch den lateral inhomogenen Erdmantel

J. Stadelmann

Institut für Geophysik und Meteorologie, TU Braunschweig

## Einleitung

Das Erdmagnetfeld weist für die Multipolanteile vom Grad  $2 \leq \ell \leq 10$  des inneren Feldes Unterschiede in  $B_r^2$  zwischen der atlantischen und der pazifischen Hemisphäre auf. Untersucht wird, ob diese Beobachtungen durch eine laterale Inhomogenität der elektrischen Leitfähigkeit im Erdmantel erklärbar sind.

## Unterschiede zwischen der atlantischen und der pazifischen Hemisphäre

Walker und Backus (1996) haben  $B_r^2(\vartheta, \lambda)$  gemittelt über die atlantische Hemisphäre ( $\langle B_r^2 \rangle_A$ ) und die pazifische Hemisphäre ( $\langle B_r^2 \rangle_P$ ) und die Differenz

$$\Delta = \langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P$$

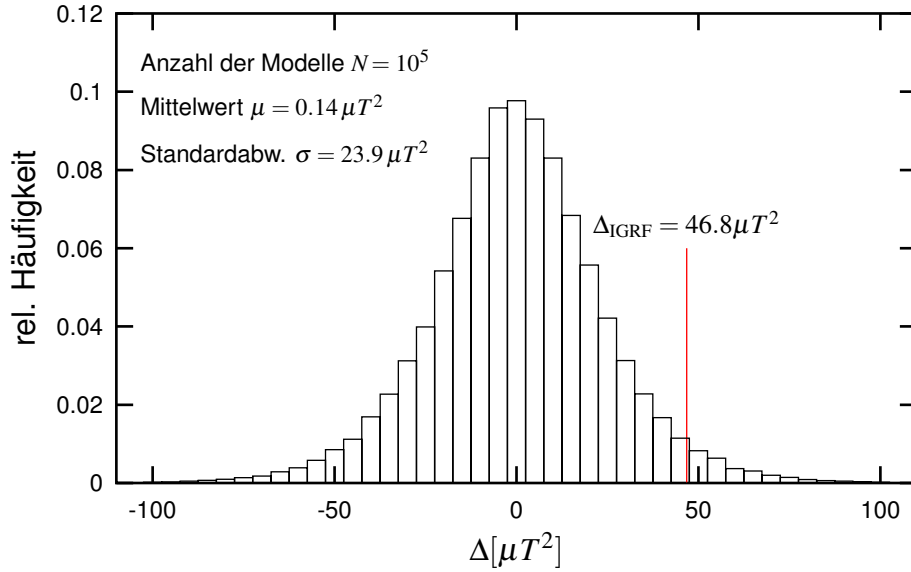
gebildet. Für das IGRF 1980 ergibt sich  $\Delta_{\text{IGRF}} = 46.8 \mu T^2$ . Dieser Wert ist kaum vereinbar mit statistischen Modellen von Constable und Parker (1988) für das Multipolfeld für  $2 \leq \ell \leq 10$ . In diesem Modell entstammen die Gaußkoeffizienten  $g_\ell^m$  und  $h_\ell^m$  in der Kugelfunktionsentwicklung

$$\vec{B} = -\nabla\Phi, \\ \Phi = \sum_{\ell=2}^{10} a \left(\frac{a}{r}\right)^{\ell+1} \sum_{m=0}^{\ell} [g_\ell^m \cos m\lambda + h_\ell^m \sin m\lambda] P_\ell^m(\cos \vartheta)$$

einer Normalverteilung mit Erwartungswert 0 und Standardabweichung  $\sigma_\ell$ . Aus der Forderung, daß die Energie an der Kernmantelgrenze gleichmäßig auf alle Grade verteilt sein soll, folgt

$$\sigma_\ell^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^{2\ell+4} \frac{\alpha^2}{(\ell+1)(2\ell+1)}.$$

Die Anpassung an die Beobachtungen liefert die Konstante  $\alpha = 93.3 \mu T$ .



**Abbildung 1:** Häufigkeitsverteilung von  $\Delta = \langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P$  für  $10^5$  statistische Modelle für das Multipolfeld mit  $2 \leq \ell \leq 10$

Abb. 1 zeigt für  $N = 10^5$  zufällige Modelle die relative Häufigkeit von  $\Delta$ . Die Abweichung von  $\Delta_{\text{IGRF}}$  vom Mittelwert beträgt fast zwei Standardabweichungen, und es kann nicht ausgeschlossen werden, daß es sich um eine systematische Abweichung handelt. Diese Abweichung könnte erklärt werden durch Prozesse im Kern oder durch unterschiedlich starke elektromagnetische Abschirmung durch den Erdmantel, da das Erdmagnetfeld zeitliche Schwankungen (Säkularvariationen) aufweist.

## Lateral inhomogener Mantel

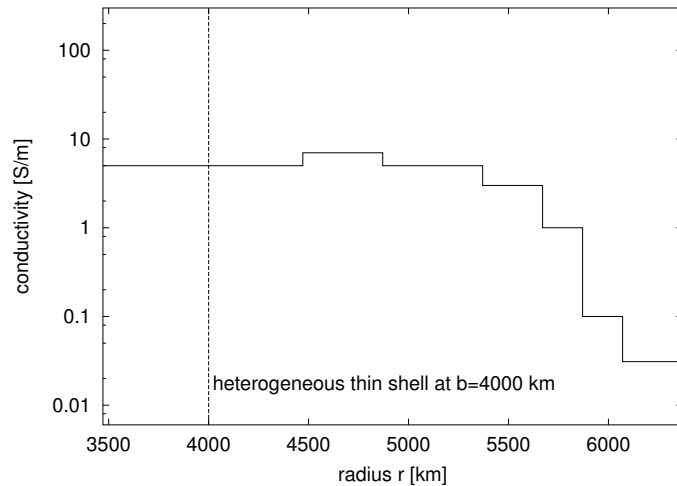
Bei dem hier verwendeten Leitfähigkeitsmodell handelt es sich um einen radialsymmetrischen geschichteten Mantel, in den eine infinitesimal dünne, lateral inhomogene Schicht eingebettet ist, vgl. Abb. 2. Die Schicht besteht aus zwei Hemisphären mit den unterschiedlichen Leitwerten  $\tau_A = 3 \cdot 10^6 S$  (atlantische Hemisphäre) und  $\tau_P = 15 \cdot 10^6 S$  (pazifische Hemisphäre), vgl. Abb. 3.

Für dieses Modell werden die Übertragungsfunktionen

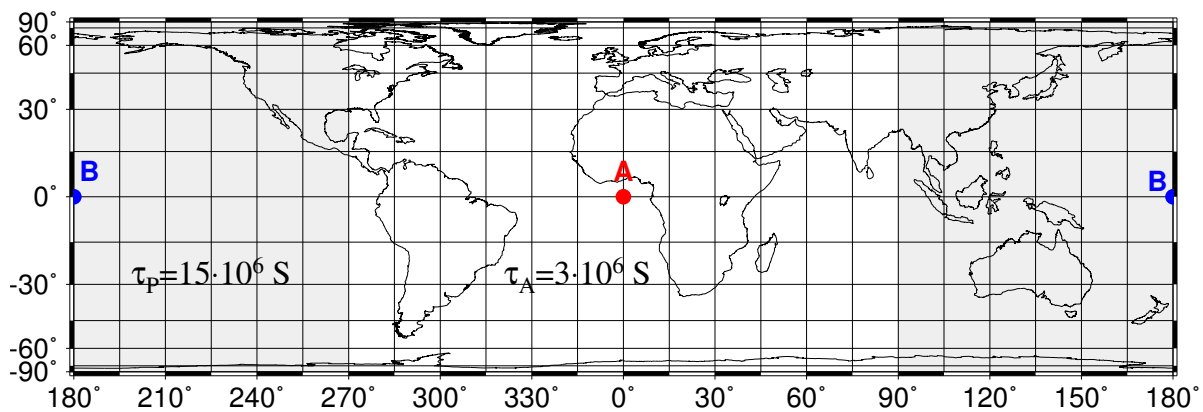
$$f(\vartheta, \lambda, \omega; G_\ell^m) = \frac{B_r(\vartheta, \lambda, \omega; G_\ell^m)}{G_\ell^m(\omega)} \quad \text{und}$$

$$f(\vartheta, \lambda, \omega; H_\ell^m) = \frac{B_r(\vartheta, \lambda, \omega; H_\ell^m)}{H_\ell^m(\omega)}$$

bestimmt. Sie beschreiben  $B_r$  am Ort  $\vartheta, \lambda$  auf der Erdoberfläche bei harmonischer Anregung mit der Frequenz  $\omega$  durch einen Multipol, der durch die Koeffizienten  $G_\ell^m$  und  $H_\ell^m$  festgelegt ist. Diese sind i. a. verschieden von den Gaußkoeffizienten  $g_\ell^m$  und  $h_\ell^m$ . Nur für den Spezialfall eines nichtleitenden Mantels fallen die  $G_\ell^m$  und die  $H_\ell^m$  zusammen mit den an die Kernmantelgrenze fortgesetzten Gaußkoeffizienten  $g_\ell^m$  und  $h_\ell^m$ .



**Abbildung 2:** Leitfähigkeitsmodell für den Mantel



**Abbildung 3:** Die Leitwerte der beiden Hemisphären (weiß und grau) unterscheiden sich um einen Faktor 5. Ihre Mittelpunkte liegen in A und B.

Die Kenntnis der Übertragungsfunktionen gestattet es, den zeitlichen Mittelwert von  $B_r^2(\vartheta, \lambda)$  zu berechnen:

$$\overline{B_r^2(\vartheta, \lambda)} = \sum_{\ell=2}^{10} \sum_{m=0}^{\ell} \left[ \overline{B_r^2(\vartheta, \lambda; G_{\ell}^m)} + \overline{B_r^2(\vartheta, \lambda; H_{\ell}^m)} \right] \quad \text{mit}$$

$$\overline{B_r^2(\vartheta, \lambda; G_{\ell}^m)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} B_r^2(t, \vartheta, \lambda; G_{\ell}^m) dt .$$

Allerdings müssen die Leistungsspektren  $P(\omega; G_{\ell}^m)$  und  $P(\omega; H_{\ell}^m)$  des anregenden Feldes an der Kernmantelgrenze gegeben sein.

## Leistungsspektrum an der Kernmantelgrenze

### Weißes Rauschen

Analog zur Annahme, daß die Energie über alle Grade gleichmäßig verteilt ist, wird angenommen, daß auch alle Frequenzen in gleichem Maße angeregt werden. Die Koeffizienten  $G_\ell^m$  und  $H_\ell^m$  sind im Zeitbereich durch weißes Rauschen charakterisiert. In Abb. 6 ist der zugehörige Mittelwert von  $\overline{B_r^2}$  auf der Erdoberfläche dargestellt. Der Einfluß des Leitfähigkeitsunterschieds tritt deutlich hervor. Die zeitlich und räumlich gemittelte Differenz zwischen den Hemisphären

$$\overline{\Delta} = \langle \overline{B_r^2} \rangle_A - \langle \overline{B_r^2} \rangle_P$$

beträgt immerhin  $20.7\mu T^2$  und liegt damit in vergleichbarer Größenordnung mit  $\Delta_{\text{IGRF}} = 46.8\mu T^2$ . Aber das Feld weist an der Erdoberfläche eine größere Dynamik auf als man sie beobachtet. Abb. 4 vergleicht den zeitlichen Verlauf an den Punkten A und B, die in den Zentren der beiden Hemisphären liegen. Als anregendes Feld ist zur besseren Vergleichbarkeit ein Dipolfeld angesetzt worden. Aufgrund der hohen Änderungsraten, die mit steigender Multipolordnung sogar noch zunehmen, erscheint ein Quellfeld realistischer zu sein, dessen Leistungsspektrum zu hohen Frequenzen hin abfällt.

### Rotes Rauschen

Setzt man für das Leistungsspektrum an der Kernmantelgrenze  $P(\omega; G_\ell^m) \sim e^{-(\omega\tau_k/2)^2}$  an, wobei hier  $\tau_k = 2a$  gewählt ist, dann ist die zeitliche Dynamik deutlich reduziert, vgl. Abb. 5. Gleichzeitig nimmt der Unterschied in  $B_r$  zwischen den Punkten A und B ab. Das Fehlen der hohen Frequenzen führt dazu, daß sich die laterale Inhomogenität fast gar nicht mehr in  $\overline{B_r^2}$  bemerkbar macht, vgl. Abb. 7. Die Differenz  $\overline{\Delta} = 1.4\mu T^2$  ist äußerst klein.

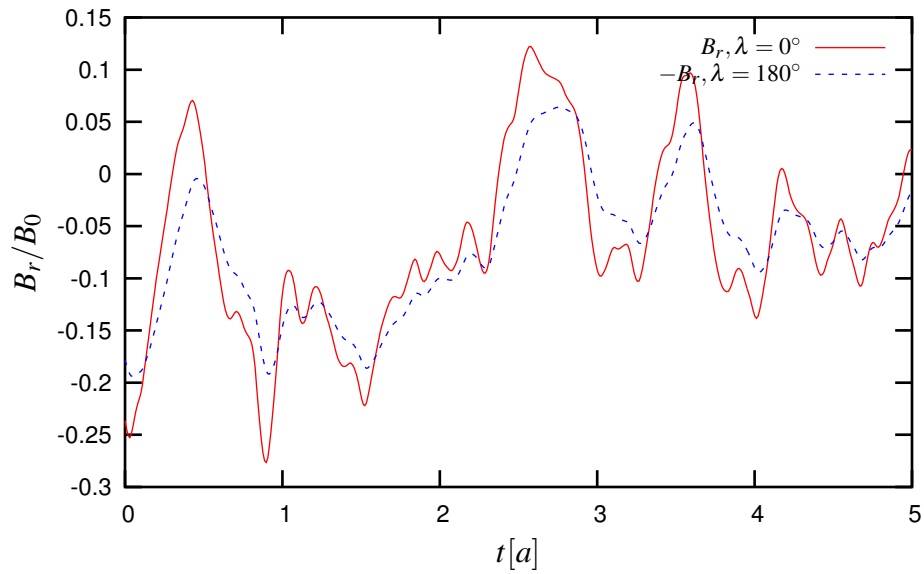
### Fazit

Ein ausreichender Beitrag hoher Frequenzen zum Quellfeld ist erforderlich, damit sich laterale Inhomogenitäten in der Mantelleitfähigkeit deutlich auf  $B_r$  an der Erdoberfläche auswirken. Da die beobachteten Säkularvariationen eher moderat sind, kann die große Differenz zwischen  $\Delta_{\text{IGRF}}$  nicht durch laterale Inhomogenitäten im Mantel erklärt werden.

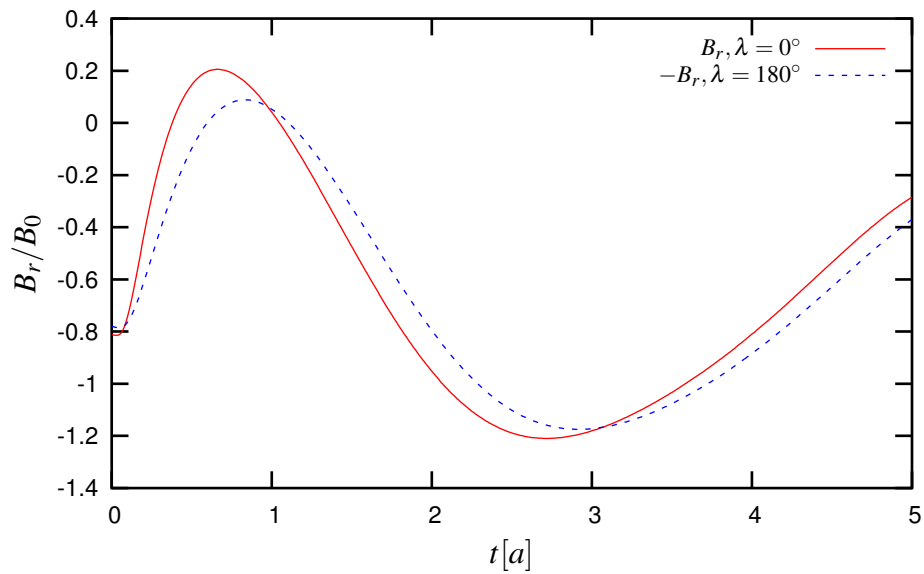
### Literatur

Walker, A. D. und Backus, G. E. (1996). *On the difference between the average values of  $B_r^2$  in the Atlantic and Pacific hemispheres*. Geophys. Res. Lett., 23, 1965-1968.

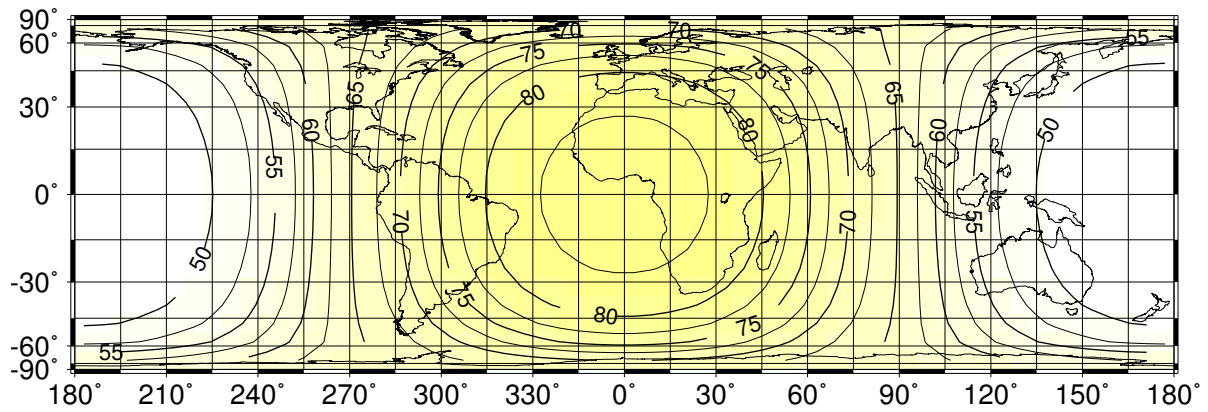
Constable, C. G. und Parker, R. L. (1988). *Statistics of the Geomagnetic Secular Variation for the Past 5 m.y.* J. Geophys. Res., 93, 11 569-11 581.



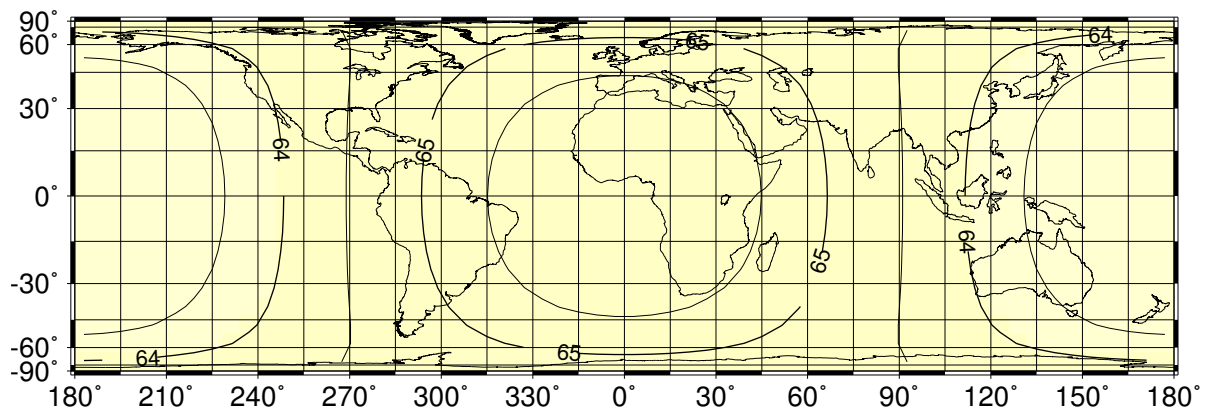
**Abbildung 4:** Der Verlauf von  $B_r$  in den Punkten A (durchgezogen) und B (gestrichelt), vgl. Abb. 3, ist über der Zeit  $t$  dargestellt. Die Quelle, ein Dipol mit den Polen A und B, zeigt weißes Rauschen.



**Abbildung 5:** Dargestellt ist analog zu Abb. 4 der zeitliche Verlauf von  $B_r$  in den Punkten A (durchgezogen) und B (gestrichelt). Das Quellfeld ist im Zeitbereich durch rotes Rauschen charakterisiert.



**Abbildung 6:** Dargestellt ist  $\overline{B_r^2}$  in  $\mu T^2$ . Das Quellfeld enthält Beiträge von Multipolen vom Grad  $l$  mit  $2 \leq l \leq 10$ . Im Zeitbereich zeigt das Quellfeld weißes Rauschen. Die Leitfähigkeitsdifferenz zwischen den beiden Hemisphären wirkt sich stark auf  $B_r^2$  aus.



**Abbildung 7:** Dargestellt ist  $\overline{B_r^2}$  in  $\mu T^2$ . Das Quellfeld enthält Beiträge von Multipolen vom Grad  $l$  mit  $2 \leq l \leq 10$ . Das Quellfeld ist durch rotes Rauschen charakterisiert. Die Leitfähigkeitsdifferenz macht sich kaum bemerkbar.