

Ergebnisse der Joint-Inversion von SHOTEM und LOTEM

J. Lange¹, S. L. Helwig¹, C. Scholl¹, B. Tezkan¹, M. Goldman²

Zusammenfassung

Short-Offset-TEM (oder Central-loop-TEM) und Long-Offset-TEM stellen zwei typische Konfigurationen der Transient-Elektromagnetik dar. Zur Auswertung beider Methoden wurde ein 1D-Inversionsprogramm entwickelt mit dem die verschiedenen Datensätze gemeinsam invertiert werden können. Zunächst wurde an synthetischen Datensätzen mit Hilfe von Occam- und Monte-Carlo-Inversionen das Auflösungsvermögen der einzelnen Methoden, derer Komponenten und der Kombination dieser untersucht. Ein Ergebnis der Modellrechnungen ist, dass durch die Joint-Inversion der SHOTEM- mit den LOTEM-Daten Äquivalenzen vermindert werden und so die einzelnen Parameter genauer bestimmt werden können. Zudem zeigt sich, dass nur unter Einbeziehung der elektrischen Feldkomponente der LOTEM-Messung in der Inversion auch schlechtleitende Strukturen gut aufgelöst werden. Eine erste Anwendung auf Felddaten aus Israel zeigt zufriedenstellende Ergebnisse, wobei deutlich wird, dass eine eindimensionale Erklärung der Daten oft nicht ausreicht.

1. Einleitung

Die beiden wichtigsten Trinkwasserquellen Israels, der Yarkon-Taninim Aquifer in Zentral Israel und der See Genezareth versalzen zunehmend. Die verursachenden Mechanismen und Quellen sind bisher nicht eindeutig geklärt. Als Ursache werden lokale Solen wie auch Meerwasserinfiltrationen diskutiert (Gvirtzman et al., 1997). Zur Validierung der einzelnen Theorien ist vor allem die Kenntnis der Tiefe, Lage und der Salinität des Grundwassers von Bedeutung. Die Erklärung durch Meerwasserinfiltrationen zum Beispiel, würde einen durchgehenden Wasserleiter vom Mittelmeer bis zum See Genezareth benötigen. Da sich der Salzgehalt deutlich auf den elektrischen Widerstand des Grundwassers auswirkt wäre ein solcher saliner Aquifer durch eine Bestimmung der Widerstandsverteilung auszumachen. Zur Untersuchung wurden Transient-elektromagnetische Methoden gewählt. Im Rahmen des bilateralen BMBF Projektes "Integrated electromagnetic geophysical technology applied to the detection of deep fresh/saline groundwater interfaces in northern and central Israel." führten dazu im März 2002 Mitarbeiter des Instituts für Geophysik und Meteorologie der Universität zu Köln im nördlichen Teil Israels, genauer zwischen dem Mittelmeer und dem See Genezareth Long-Offset-TEM (LOTEM) Messungen zur Untersuchung tieferer Strukturen durch. Die Central-Loop-TEM (SHOTEM) Messungen zur Untersuchung oberflächennaher Struktu-

ren wurden von Mitarbeitern des Geophysical Institute of Israel ausgeführt. Bei LOTEM wird mittels eines elektrischen Dipols von etwa 1 km Länge ein Rechtecksignal in den Boden eingespeist. Die resultierenden elektrischen und die zeitliche Ableitung der magnetischen Felder werden in ca. 2-5 km Entfernung aufgezeichnet. Bei den SHOTEM-Messungen wird mit einer meist rechteckig ausgelegten Spule gesendet. In deren Mitte befindet sich eine zweite kleinere Empfangsspule. Als Ergänzung zur standardmäßig angewandten 1D-Auswertung der einzelnen Methoden wurde ein 1D-Jointinversionsprogramm entwickelt, mit dem sich beide Methoden und mehrere Datensätze gemeinsam auswerten lassen.

2. Joint-Inversion

Bei der Joint-Inversion werden mehrere Datensätze die durch die gleichen physikalischen Parameter beschrieben werden können gemeinsam angepasst. Dazu können Datensätze verschiedener Methoden, verschiedener Feldkomponenten oder verschiedener Messungen kombiniert werden. Man erreicht so eine Verminderung von Äquivalenzen, die bei der Inversion des einzelnen Datensatzes (Vozoff und Jupp, 1975) auftreten. Bei dem entwickelten Inversionsprogramm stehen zur Joint-Inversion verschiedene Algorithmen zur Verfügung. Prinzipiell wird dabei versucht die gemessenen Daten y_i innerhalb ihrer Fehler Δy_i durch einen geschichteten Halbraum zu erklären. Für die im Parametervektor \vec{p} zusammengefassten Widerstände und Schichtdicken des angenomme-

¹Institut für Geophysik und Meteorologie der Universität zu Köln

²Geophysical Institute of Israel

nen Modells werden mit einer Vorwärtsrechnung synthetische Daten $f_i(\vec{p}_0)$ berechnet, wobei der Index i bei Messungen im Zeitbereich für die verschiedenen Zeitpunkte steht. Bei der Joint-Inversion setzten sich diese Vektoren aus denen der einzelnen Methoden zusammen:

$$\begin{aligned} \vec{y} &= (\underbrace{\vec{y}_{\text{SHOTEM}}}_{n_1}, \underbrace{\vec{y}_{\text{LOTEM-Hz}}}_{n_2}, \dots) \\ \vec{\Delta y} &= (\underbrace{\vec{\Delta y}_{\text{SHOTEM}}}_{n_1}, \underbrace{\vec{\Delta y}_{\text{LOTEM-Hz}}}_{n_2}, \dots) \\ \vec{f}(\vec{p}) &= (\underbrace{\vec{f}_{\text{SHOTEM}}(\vec{p})}_{n_1}, \underbrace{\vec{f}_{\text{LOTEM-Hz}}(\vec{p})}_{n_2}, \dots) \end{aligned}$$

Zur Beurteilung der Anpassungsqualität vergleicht man die berechneten Daten mit den Gemessenen. Ein Ausdruck für die Güte der Anpassung ist durch die Größe (Constable et al., 1987):

$$\chi = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(f_i(\vec{p}_0) - y_i)^2}{\Delta y_i^2}} \quad (1)$$

gegeben. Um die Methoden der linearen Inversion anwenden zu können muss die in der Regel für EM-Methoden nichtlineare Funktion f linearisiert werden. Mittels Taylorentwicklung um \vec{p}_0 bis zur ersten Ordnung erhält man:

$$\vec{f}(\vec{p}) = \vec{f}(\vec{p}_0) + \mathbf{J} \vec{\Delta p}, \quad (2)$$

wobei \mathbf{J} die Jacobimatrix an der Stelle \vec{p}_0 ist. Da sie angibt, wie die Vorwärtsrechnung auf kleine Parameteränderungen reagiert wird sie auch Sensitivitätsmatrix genannt. Es lässt sich nun für χ ein Fehlerfunktional angeben, dessen Minimierung zur Modellverbesserung

$$\vec{\Delta p} = (\mathbf{J}_w^T \mathbf{J}_w)^{-1} \mathbf{J}_w^T [\vec{f}(\vec{p}_0) - \vec{y}]_w \quad (3)$$

führt. Der Index w steht hier für eine Gewichtung auf die Standardabweichung mittels Multiplikation mit einer Diagonalmatrix \mathbf{W} , mit $W_{ii} = w_i = 1/\Delta y_i$ für $i = 1, \dots, n$.

Beim Marquardt-Levenberg-Verfahren (Jupp und Vozoff, 1975) wird das oben beschriebene Gauß-Newton-Verfahren mit der Gradientenmethode kombiniert. Man erhält für die Parameteränderung:

$$\vec{\Delta p} = (\mathbf{J}_w^T \mathbf{J}_w + \beta \mathbf{I})^{-1} \mathbf{J}_w^T [\vec{f}(\vec{p}_0) - \vec{y}]_w. \quad (4)$$

Der Lagrangemultiplikator β wichtet beide Methoden zueinander. Die Berechnung der Inversen von $\mathbf{J}_w^T \mathbf{J}_w$ kann mit Hilfe der Singulärwertzerlegung (SVD) der Jacobimatrix ausgeführt werden (Lanczos, 1964). Hierbei wird die Jacobimatrix $\mathbf{J}_w \in \mathbb{R}^{n \times m}$ in ein Produkt aus orthonormalen Matrizen $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und

$\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, sowie einer Diagonalmatrix $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ zerlegt, so daß gilt:

$$\mathbf{J}_w = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^T \quad (5)$$

Die Spalten der Matrix \mathbf{V} sind die Eigenvektoren von $\mathbf{J}_w^T \mathbf{J}_w$ und spannen den Parameterraum auf. Die Diagonalmatrix \mathbf{S} beinhaltet die zugehörigen Singulärwerte S_{ii} , welche die Wurzel der Eigenwerte von $\mathbf{J}_w^T \mathbf{J}_w$ sind. Die Matrix \mathbf{U} schließlich enthält die Eigenvektoren von $\mathbf{J}_w \mathbf{J}_w^T$. Definiert man nun zwei Diagonalmatrizen \mathbf{S}^* und \mathbf{T} durch:

$$S_{ii}^* = \frac{1}{S_{ii}} \quad \text{und} \quad T_{ii} = \frac{S_{ii}^2}{S_{ii}^2 + \beta} \quad (6)$$

vereinfacht sich Gleichung 4 zu:

$$\vec{\Delta p} = \mathbf{V} \mathbf{T} \mathbf{S}^* \mathbf{U}^T [\vec{f}(\vec{p}_0) - \vec{y}]_w. \quad (7)$$

Neben der Marquardt-Inversion, können mit dem entwickelten Programm auch Occam- und eine Art Monte-Carlo-Inversion, bei der die Startmodelle zufällig gewählt sind, durchgeführt werden. Bei der Occam-Inversion (Constable et al., 1987) werden die Schichtgrenzen nicht verändert, statt dessen wählt man eine genügend große Anzahl an Schichten, um eine zufrieden stellende Anpassung zu gewährleisten. Als zusätzliche Randbedingung wird die so genannte Rauhmigkeit des Modells minimiert. Sie kann auf folgende Weise definiert werden:

$$R_1 = \int \left(\frac{d\rho}{dz} \right)^2 dz \quad \text{oder} \quad R_2 = \int \left(\frac{d^2\rho}{dz^2} \right)^2 dz \quad (8)$$

Bei der Inversion führt die Verwendung von R_1 zum Modell mit den geringsten Widerstandsänderungen, die von R_2 zum Modell konstantester Widerstandsänderung. In Tiefen, in denen die Widerstände nicht ausreichend durch die Daten bestimmt sind, dominiert die jeweilige Randbedingung, und man erhält so für die schlecht aufgelösten Modellbereiche je nach Rauhmigkeitsdefinition unterschiedliche Widerstandsverläufe. Dadurch ist es möglich auf eine einfache Art aufzuzeigen in welchen Bereichen die Widerstände eindeutig bestimmt sind und welche Tiefenbereiche nicht durch die Messung erfasst sind. Da die Occam-Inversion deutlich unabhängiger vom Startmodell ist, als das Marquardt-Verfahren, eignet sich diese gut für eine automatisierte Inversion, die bei der Bearbeitung großer Datenmengen wünschenswert ist.

Eine weitere Möglichkeit bietet das hier als Monte-Carlo-Inversion bezeichnete Verfahren, bei dem für mehrere hundert bis tausend innerhalb sinnvoller Grenzen willkürlich gewählte Startmodelle Marquardt-Inversionen gerechnet werden. Abhängig von der Anzahl der Startmodelle erhält man so eine repräsentative Auswahl an bezüglich der Datenanpassung äquivalenten Modellen. Ein Nachteil dieses Verfahrens hinsichtlich der Automatisierung

ist jedoch der hohe Rechenaufwand. Zum Vergleich der Ergebnisse der Monte-Carlo-Inversion wurden für das Modell mit dem kleinsten Anpassungsfehler die Parameterimportances berechnet. Zur Berechnung dieser bedient man sich der Matrizen \mathbf{T} und \mathbf{V} aus der Singulärwertzerlegung der Sensitivitätsmatrix. Wie aus Gleichung 7 hervorgeht, können die Parameter p_i mit der Matrix \mathbf{V}^T in den durch die Daten aufgelösten Parameterraum transformiert werden. Da zusätzlich durch die T_{ii} der Einfluß der transformierten Parameter mit kleinen Eigenwerten ($S_{ii} < \beta$) gedämpft wird kann durch

$$\mathbf{R} = \mathbf{V}\mathbf{T}(\mathbf{V}\mathbf{T})^T. \quad (9)$$

eine Auflösungsmatrix \mathbf{R} definiert werden, deren Diagonalelemente die Parameterimportances sind. Diese geben so die Wichtigkeit eines Parameters bei der Lösung des Inversionsproblems an und liegen bei entsprechender Normierung der T_{ii} auf den größten Eigenwert zwischen 1 und 0, wobei große Werte eine gute Auflösung des Parameters bedeuten und kleine eine Schlechte.

3. Inversionen mit synthetischen Daten

Zum Test der Joint-Inversion wurden zunächst für ein Fünfschichtmodell (mit $d_1 = 100$ m, $d_2 = 100$ m, $d_3 = 500$ m, $d_4 = 500$ m, $\rho_1 = 50 \Omega\text{m}$, $\rho_2 = 5 \Omega\text{m}$, $\rho_3 = 50 \Omega\text{m}$, $\rho_4 = 1 \Omega\text{m}$ und $\rho_5 = 50 \Omega\text{m}$) und typische Zeitbereiche und Konfigurationen synthetische Daten erzeugt (SHOTEM: Sendespule 200 m \times 200 m, 20 A Sendestrom, $0,1$ ms bis 40 ms, LOTEM : Offset $2,5$ km, Sendemoment 66000 Am, 5 ms bis 1 s). Diese wurden zusätzlich mit 3% gaußverteilterm Rauschen

verunreinigt. Im Anschluß wurden die so erhaltenen Daten mit den verschiedenen Ansätzen invertiert.

Die Ergebnisse der Einzel-Inversion der SHOTEM-Daten (CL) und der Joint-Inversion der elektrischen (E_x) und der zeitlichen Ableitung der magnetischen (\dot{H}_z) Feldkomponente der LOTEM-Daten (mit E_x -Hz gekennzeichnet) sind in Abbildung 1 und 2 oben gezeigt, links jeweils die Occam-Ergebnisse für Inversionen mit jeweils beiden Rauigkeitsdefinitionen, sowie das Ausgangsmodell (blau), in der Mitte die Ergebnisse der Monte-Carlo-Inversion und rechts die Parameterimportances für das Modell mit dem kleinsten Anpassungsfehler. Deutlich zu sehen sind die unterschiedlichen Tiefenbereiche und Strukturen, die durch die Methoden aufgelöst werden. Bei den Ergebnissen SHOTEM-Occam-Inversion zeigt sich durch die Abweichung der beiden Modellverläufe für die unterschiedlichen Glättungsbedingungen, dass der Widerstand ab 200 m nicht mehr eindeutig bestimmt werden kann. Lediglich das Anschließen einer besser leitenden Struktur ab etwa 650 m wird deutlich, absolute Werte können aber wegen der Glättung nicht bestimmt werden. Das Ergebnis der Monte-Carlo-Inversion zeigt das vor allem der Widerstand der schlecht leitenden Schicht zwischen 200 m und 700 m schlecht aufgelöst wird, während Ober- und Unterkante dieser Schicht eindeutig bestimmt sind. Gleiches geht auch aus den Importances hervor. Aufgrund des beschränkten Zeitbereiches ist die unterste fünfte Schicht nicht mehr notwendig um die Daten zu beschreiben.

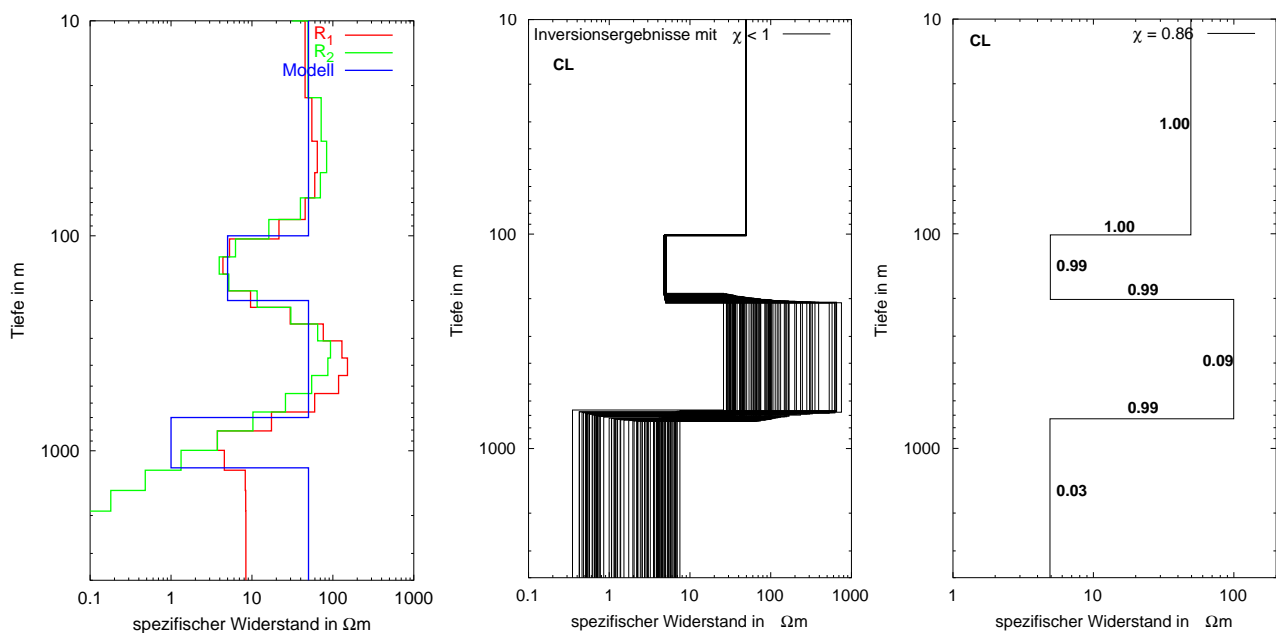


Abbildung 1: Occam- und Monte-Carlo-Inversionsergebnisse, sowie die zugehörigen Parameterimportances für die Inversion synthetischer SHOTEM-Daten.

Entsprechend ist dies bei der Inversion der LOTEM-Daten. Dort wird die oberste Schicht zur Anpassung der Daten nicht benötigt und auch der Widerstand und die Tiefe der zweiten Schicht sind nicht eindeutig durch die Daten bestimmt. Im Inversionsergebnis erhält man anstatt der tatsächlich zwei oberen Schichten nur eine etwa 350 m mächtige $12 \Omega\text{m}$ -Schicht mit hoher Importance (0,94). Hier ist vielmehr der gemittelte, bzw. integrierte Widerstand der Schichten von Bedeutung. Man sieht an diesem Beispiel, dass ein hoher Wert nicht gleichbedeutend ist mit einer hohen Vertrauenswürdigkeit, bzw. Genauigkeit des Modells.

Die Importances beschreibt also lediglich die Wichtigkeit des Parameters bei der Lösung des Inversionproblems.

Durch eine Joint-Inversion der magnetischen LOTEM-Feldkomponente mit den SHOTEM-Daten kann zwar der gesamte Tiefenbereich aufgelöst werden, jedoch bleibt die geringe Sensibilität gegenüber dem Widerstand schlechtleitender Schichten (Abbildung 2 unten), wie es schon bei alleinigen Inversion der SHOTEM-Daten zu beobachten war. Zur Bestimmung von Schichtgrenzen oder Widerständen gutleitender Strukturen ist diese Kombination allerdings

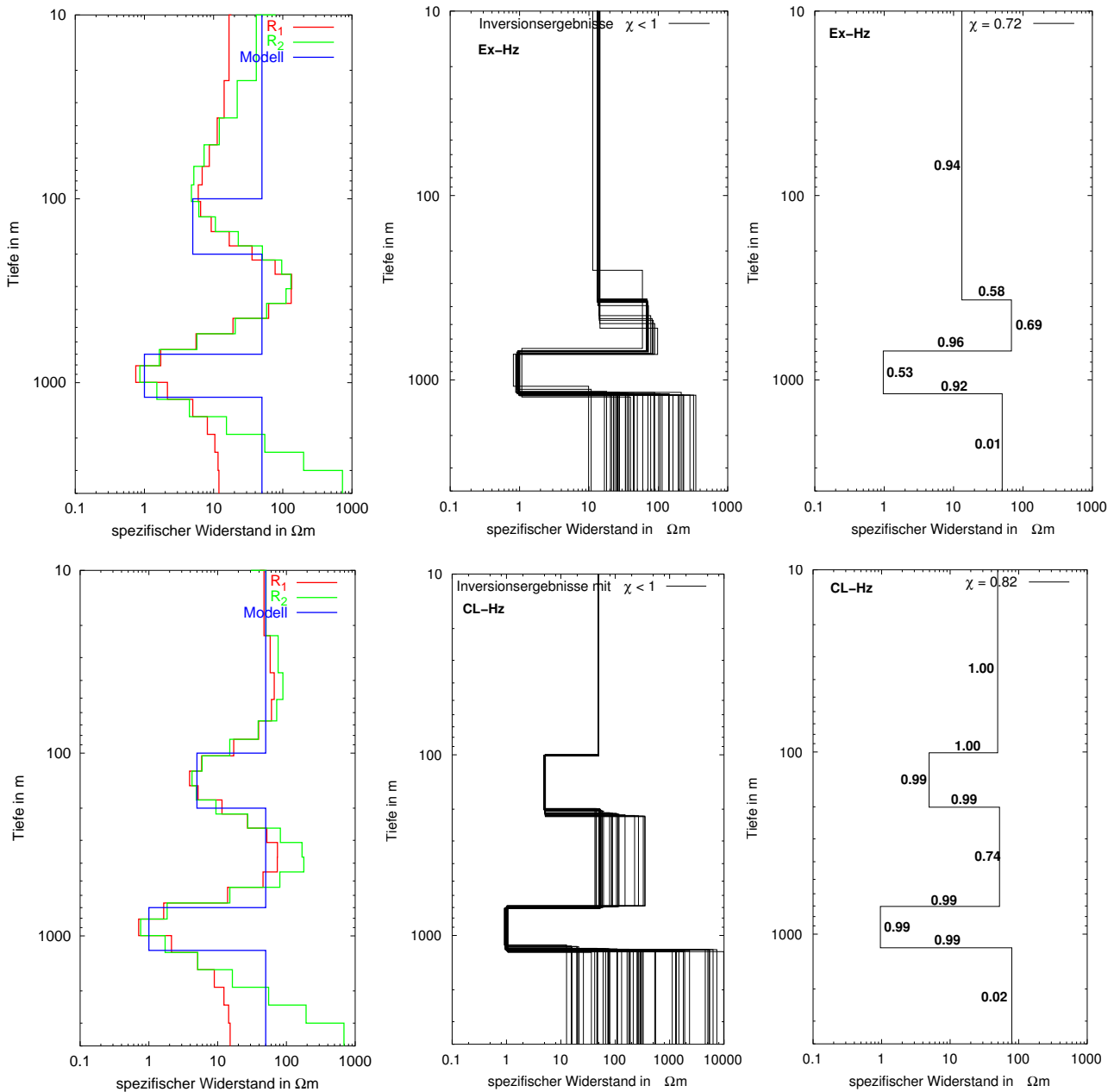


Abbildung 2: Occam- und Monte-Carlo-Inversionsergebnisse, sowie die zugehörigen Parameterimportances der Joint-Inversion synthetischer LOTEM- \dot{H}_z - mit LOTEM- \dot{E}_x -Daten oben, sowie der Joint-Inversion synthetischer SHOTEM-Daten mit LOTEM- \dot{H}_z -Daten unten.

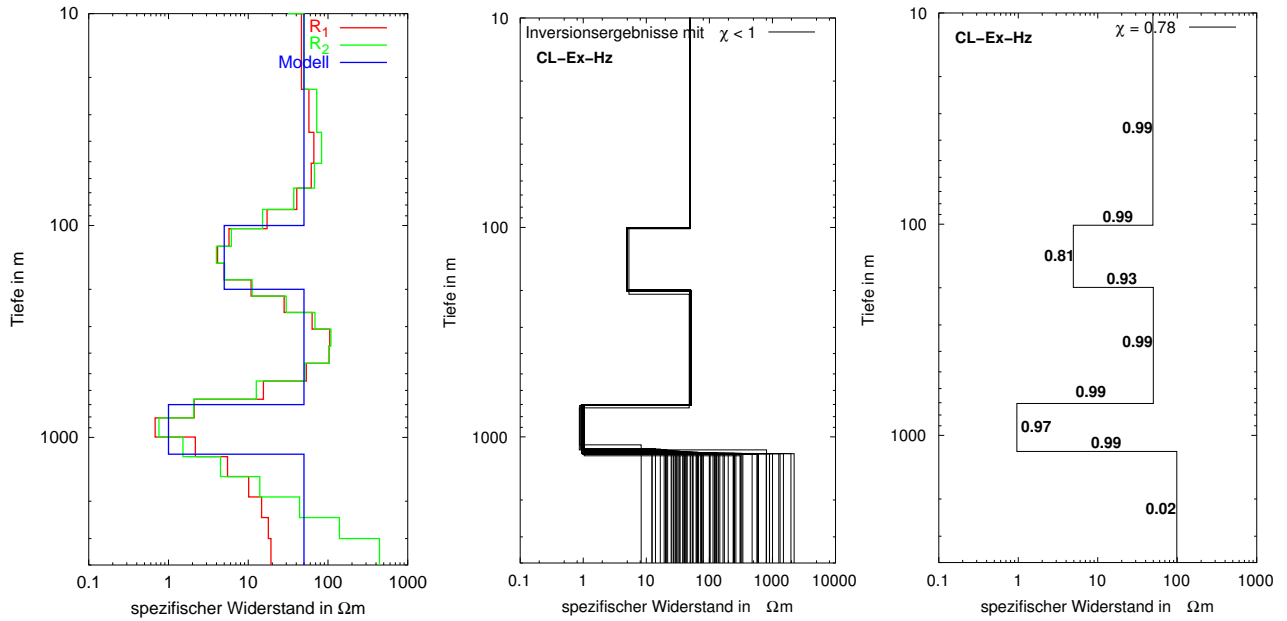


Abbildung 3: Occam- und Monte-Carlo-Inversionsergebnisse, sowie die zugehörigen Parameterimportances der Joint-Inversion synthetischer SHOTEM-Daten mit LOTEM- H_z - und E_x -Daten.

vollkommen ausreichend.

Abbildung 3 zeigt die Ergebnisse der Joint-Inversion der SHOTEM-Daten mit der E_x - und der H_z -Komponente von LOTEM. Die Hinzunahme der elektrischen LOTEM-Feldkomponente bei der Inversion erlaubt nun auch die Auflösung des Widerstandes der dritten, schlechter leitenden Schicht. Der Grund dafür, dass weiterhin der Widerstand des abschließenden Halbraums nicht eindeutig bestimmt ist, liegt in der zeitlichen Begrenzung der Daten.

In allen Beispielen sieht man eine sehr gute Übereinstimmung von der Variabilität der Parameter bei der Monte-Carlo-Inversion, ihrer Importance und der Abweichung der Occam-Modelle mit unterschiedlichen Glättungsbedingungen. Anhand der Modelle der Monte-Carlo-Inversion können zudem die Grenzen, innerhalb derer die Parameter variieren können anschaulich aufgezeigt werden. Die Ergebnisse der Occam-Inversion mit zwei Glättungsbedingungen zeigen, dass sich mit dieser Methode hervorragend ein erster Eindruck über die Leitfähigkeitsverteilung und das Auflösungsvermögen der Daten erlangen lässt.

4. Inversion von Felddaten

Abbildung 4 zeigt die Anpassung von Felddaten der ersten Messkampagne in Israel aus dem Jahr 2002. Die Messlokation wurde in der Nähe eines Bohrlochs gewählt um später die Inversionsergebnisse mit den geologischen Informationen vergleichen zu können.

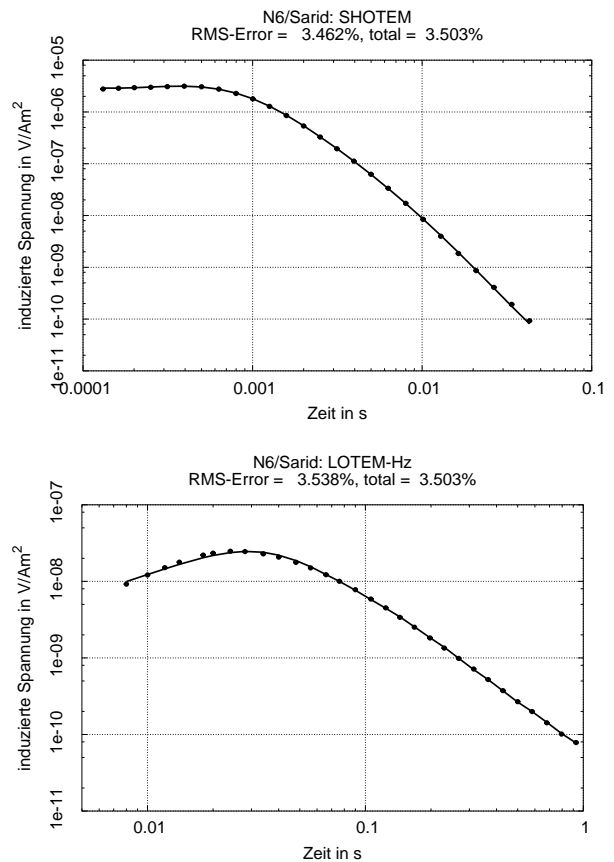


Abbildung 4: SHOTEM- und LOTEM- H_z -Daten der Messung in Israel (Punkte) und die Anpassung durch die Joint-Inversion (durchgezogene Linie).

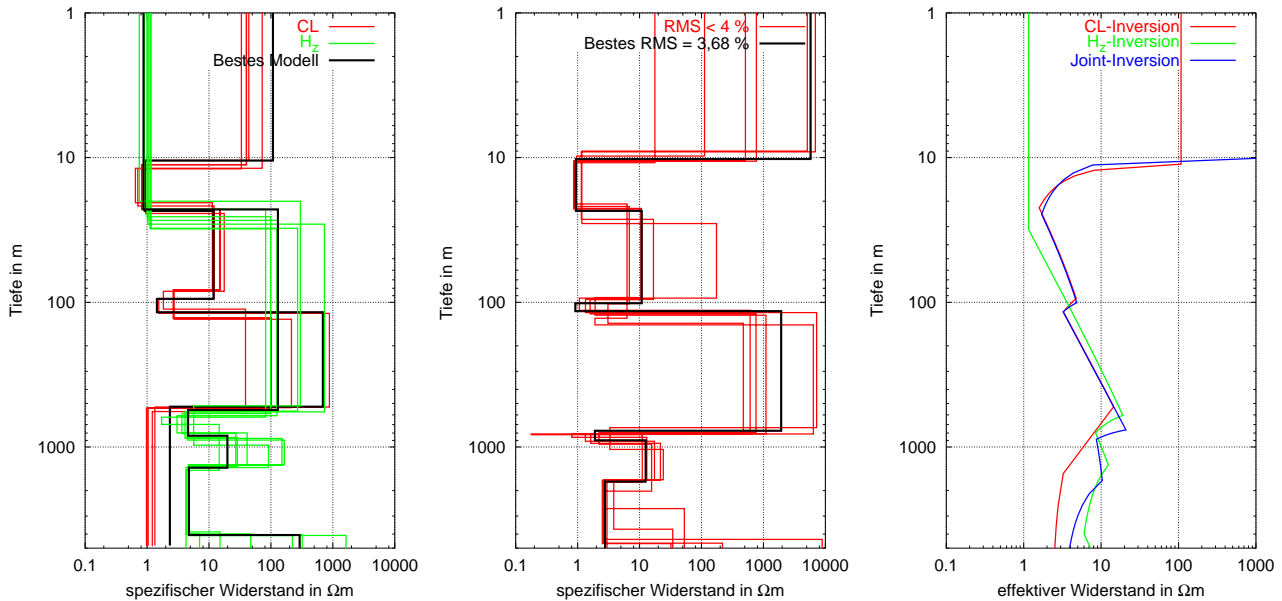


Abbildung 5: Ergebnisse der Monte-Carlo-Einzel- (links) und Joint-Inversion von SHOTEM und LOTEM- H_z (mitte), sowie der Verlauf des effektiven Widerstandes der Modelle mit den kleinsten Anpassungsfehlern.

Da für die SHOTEM-Daten keine Fehlerangaben vorlagen, wurde für alle Daten ein relativer Fehler von 1 % angenommen um eine Gleichgewichtung der Datensätze zu erreichen und somit auf die Berücksichtigung der Standardabweichungen der LOTEM-Daten verzichtet. Alternativ ist es allerdings auch möglich die Wichtungen w_{ii} der LOTEM-Daten auf ihren Mittelwert zu normieren. Jeder einzelne Datenpunkt erhält so im Mittel die gleiche Gewichtung wie ein SHOTEM-Datenpunkt. Zunächst wurden Monte-Carlo-Inversionen der einzelnen Methoden durchgeführt. Abbildung 5 zeigt links die Ergebnisse dieser Inversionen, rot die der SHOTEM-Daten und grün die der LOTEM- H_z -Komponente. Die jeweils besten Anpassungen sind schwarz dargestellt. Wie zu sehen ist, stimmen die Schichtgrenzen der besten Modelle bei etwa 20 und bei 550 m gut überein. Die SHOTEM-Daten erlauben keine Aussage über die Widerstände unterhalb von 600 m und die LOTEM-Daten vermögen nicht die gutleitende Struktur bei etwa 100 m aufzulösen. Auch die beim LOTEM-Ergebnis auftretende Schichtgrenze bei 20 m, wenn auch durch die SHOTEM-Daten bestätigt, sollte nicht notwendig sein, um die Daten anzupassen. Vielmehr entscheidend ist der effektive Widerstand der oberen Schichten. Er ist der Kehrwert der effektiven Leitfähigkeit, die sich nach Spies (1991) berechnet aus:

$$\sigma_{av}(z) = \frac{1}{z} \int_0^z \sigma(z') dz'. \quad (10)$$

Das Ergebnis der Joint-Inversion (Abbildung 5 mitte) stimmt in etwa mit dem der einzelnen Inversionen überein. Es kommt jedoch zum Teil zu einer Ver-

schiebung der Schichttiefen. So rutscht die noch bei den Ergebnissen der Einzelinversionen bei 550 m liegende Schicht etwa 100 m tiefer. Modellrechnungen haben gezeigt, dass dies sich die tieferen Schichtgrenzen dann verschieben, wenn die mittleren Leitfähigkeiten der Modelle der Einzel-Inversion nicht übereinstimmen. Diese werden in Abbildung 5 links gezeigt. Die Einbeziehung der SHOTEM-Daten in die Inversion hat den Effekt einer Fixierung der oberen Schichten auf den Wert des SHOTEM-Inversionsergebnisses. Es ist daher nicht möglich die LOTEM-Daten ideal anzupassen, wenn wie hier die Einzel-Inversionsergebnisse nicht zu einander passen. Eine Möglichkeit dem zu begegnen, ist, die ersten Datenpunkte des Lotemdatensatzes abzuschneiden, so daß sich die beiden Transienten nicht mehr zeitlich überschneiden. Es kann so eine deutlich bessere Anpassung beider Datensätze erreicht werden. Ein Vergleich der Ergebnisse mit der Geologie konnte wegen fehlender Salinitäts- und Widerstandsmessungen im Bohrloch, jedoch nicht klären, ob das so erhaltene Modell eher dem tatsächlichen Widerstandverteilungen entspricht.

Ein Ursache für die unterschiedlichen Ergebnisse der Einzelinversion der Methoden können Abweichungen der Geologie vom 1D-Fall sein. Diese wirken sich unterschiedlich auf die einzelnen Feldkomponenten und Methoden aus, so dass unter Umständen eine erfolgreiche Joint-Inversion der Datensätze nicht möglich ist. Eine komplette Auswertung der Daten der Messung in Israel ist nach dem Abschluss der zweiten Messkampagne im Dezember 2003 geplant. Weitere Ergebnisse der Messkampagne werden bei Scholl (2004) vorgestellt.

5. Ausblick

Als nächster Schritt sollte nun systematisch untersucht werden in wie weit oberflächennahe Störungen der LOTEM-Messung durch SHOTEM-Messungen kompensiert werden können. Hierzu sind weitere Modellstudien notwendig. Desweiteren erhofft mit den Daten der Messkampagne 2003 die guten Ergebnisse der hier gezeigten Modellrechnungen auch mit Felddaten erreichen zu können.

Literaturangaben

- Constable, S. C., Parker, R. L., und Constable, C. G., 1987, Occam's inversion: A practical algorithm for generating smooth models from electromagnetic sounding data: *Geophysics*, **52**, 289–300.
- Gvirtzman, H., Garven, G., und Gvirtzman, G., 1997, Hydrogeological modeling of the saline hot springs

at the sea of galilee, israel: *Water Resources Research*, **33**, 913–926.

- Jupp, D. L. B., und Vozoff, K., 1975, Stable iterative methods for the inversion of geophysical data: *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **42**, 957–976.

Lanczos, C., 1964, *Applied Analysis*: Prentice-Hall.

- Scholl, C., Goldman, M., Helwig, S. L., Kafri, U., und Tezkan, B., 2004, Modellstudien zur LOTEM-Messung in Nordisrael, Dt. Geophys. Gesellschaft, Protokoll über das 19. Kolloquium Elektromagnetische Tiefenforschung.

Spies, B. R., und Frischknecht, F. C., 1991, Electromagnetic Sounding *in* Nabighian, M. N., Hrsg., *Electromagnetic Methods in Applied Geophysics*: Soc. Expl. Geophys.

- Vozoff, K., und Jupp, D. L. B., 1975, Joint Inversion of Geophysical Data: *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **42**, 977–991.