

Zur Bias-Korrektur von Übertragungsfunktionen

Andreas Junge, Universität Frankfurt am Main

Abstract

The conventional robust estimation of magnetotelluric and geomagnetic transfer functions is generally based on a sophisticated scheme of weighting data resp. time sections and of subsequent iterative averaging over their spectra to separate signal from noise. While this procedure can improve data quality dramatically with respect to the error bars, the estimates can still be biased and thus cause false interpretation. This contribution combines the approaches by Smirnov (2003) and Müller (2000) to treat the bias problem. Median values of the real and imaginary parts of the complex transfer function values are calculated and related to the coherency. The extrapolation of the transfer functions for the coherency value equal one yields estimates with reduced bias.

Einleitung

Im Rahmen eines DFG-Projektes (Ju 347/6-1) wurden im Gebiet der TRANSALP Traverse (Abb.1) magnetotellurische Messdaten erhoben. Die Messstationen wurden zum Teil simultan betrieben, für die Aufzeichnung wurde der Datenlogger SPAM MkIII und Induktionsspulenmagnetometer der Fa. Metronix verwendet. Die Daten waren zum grossen Teil erheblichen künstlichen Störungen unterworfen und wiesen leider nur in wenigen Zeitabschnitten eine hohe räumliche Kohärenz auf (Abb.2).

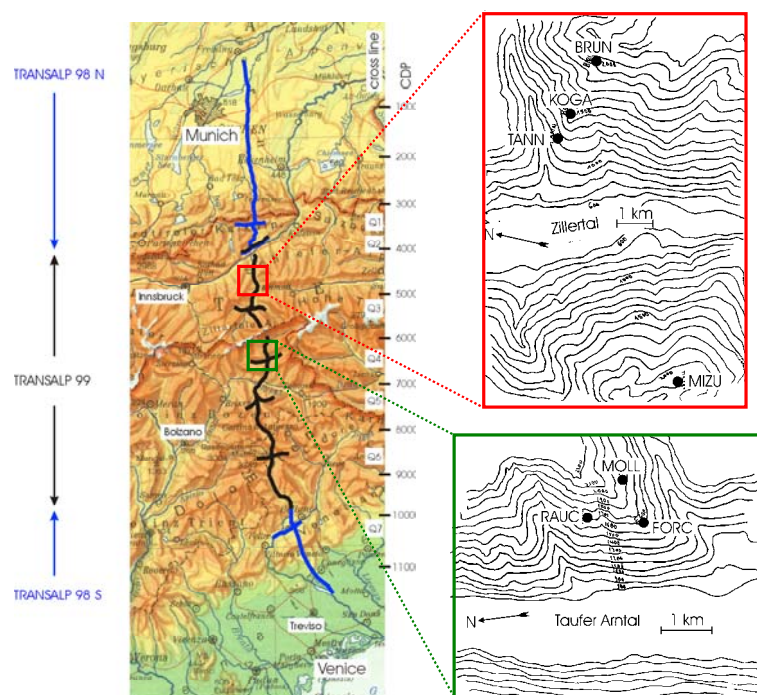


Abbildung 1: Verlauf der TRANSALP Traverse (<http://www.geophysik.uni-muenchen.de/>) und Lokation der Messgebiete. Rechts sind vergrösserte Ausschnitte mit der Lage der Messstationen zusammen mit den Höhenlinien (Abstand 100m) dargestellt.

Für die Datenanalyse stand das Auswertungsprogrammpaket EMERALD zur Verfügung (vgl. Ritter, 1995), das sich auf ein robustes Verfahren gründet (vgl. Junge, 1994, Ritter et al. 1998).

Es werden dabei simultane Zeitreihen in Einzelsegmente von in der Regel 256 Daten pro Zeitreihe zerlegt, und nach einer Fouriertransformation im Frequenzbereich geglättete Auto- und Kreuzspektren für jedes Segment berechnet. Mit einem bivariaten Ansatz, z.B.

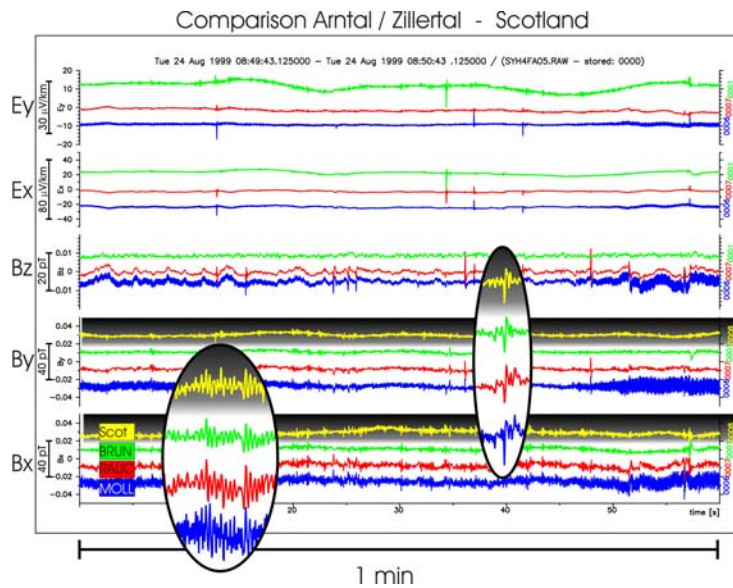


Abbildung 2: Zeitreihen magnetischer und tellurischer Feldkomponenten für ein Zeitfenster von 1 Minute Länge bei einer Taktrate von 64 Hz. Zur Lage der Messstationen siehe Abb.1, die Station Scot lag bei Edinburgh, Schottland und wurde von G. Dawes, Univ. of Edinburgh betrieben.

$$\begin{aligned} B_{x,2} &= T_{xx}^{2,1} B_{x,1} + T_{xy}^{2,1} B_{y,1} \\ B_{y,2} &= T_{yx}^{2,1} B_{x,1} + T_{yy}^{2,1} B_{y,1} \end{aligned}$$

lassen sich dann die komplexwertigen Übertragungsfunktionen T_{ij} zwischen den Zeitreihen i und j derselben oder verschiedener Stationen über eine bivariate Ausgleichsrechnung im Frequenzbereich abschätzen.

Im obigen Beispiel werden die Übertragungsfunktionen zwischen den horizontalen Komponenten des Magnetfeldes an zwei Stationen 1 und 2 bestimmt. In dem robusten Verfahren wird iterativ das Signal/Rauschverhältnis in den Spektren der jeweils abhängigen Komponente verbessert, d.h. für die Komponenten auf der linken Seite in den obigen Gleichungen. Eine wesentliche Voraussetzung hierfür ist die Rauschfreiheit der unabhängigen Komponenten, deren Verletzung zu einer Unterschätzung (= bias) der Übertragungsfunktionen führt. Auf dem Workshop on Electromagnetic Induction in Cabo Frio, Brasilien, 2000, wurde dies als ein wesentlich schwerwiegenderes Problem als die Verbesserung der Vertrauensbereiche erkannt, da Bias zusammen mit kleinen Vertrauensbereichen zu falschen Leitfähigkeitsmodellen des Untergrundes führen kann.

Der vorliegende Datensatz diente deshalb als Grundlage für die Entwicklung eines alternativen robusten Verfahrens, das auf Müller (Müller, 2000) und Smirnov (Smirnov, 2003) zurückgeht, und das im Folgenden beschrieben wird.

Das Auswerteverfahren

In dem Beispiel des vorangegangenen Abschnitts können mit den geschätzten Übertragungsfunktionen $\hat{T}_{ij}^{2,1}$ die beobachteten Magnetfeldkomponenten $B_{x,2}$ und $B_{y,2}$ vorhergesagt werden,

$$\begin{aligned} \hat{B}_{x,2} &= \hat{T}_{xx}^{2,1} B_{x,1} + \hat{T}_{xy}^{2,1} B_{y,1} \\ \hat{B}_{y,2} &= \hat{T}_{yx}^{2,1} B_{x,1} + \hat{T}_{yy}^{2,1} B_{y,1} \end{aligned}$$

mit \hat{B} als vorhergesagter Feldkomponente. Die quadratische Kohärenz r^2 ist ein Maß für das Signal/Rausch Verhältnis in den beobachteten Komponenten, z.B. für $B_{x,2}$:

$$r^2 = \frac{\langle |\hat{B}_{x,2}|^2 \rangle}{\langle |B_{x,2}|^2 \rangle}$$

$\langle \rangle$ bedeutet dabei die Glättung der Spektren im Frequenzbereich. Sind $B_{x,1}$ und $B_{y,1}$ mit Rauschen behaftet, werden die Amplituden von $\hat{T}_{ij}^{2,1}$ systematisch nach unten verzerrt. Da die Verzerrung für $r^2 \rightarrow 1$ verschwindet, können in erster Näherung asymptotische Werte für die Real- und Imaginärteile der Übertragungsfunktionen über eine lineare Regression aus der Beziehung $\hat{T}_{ij}^{2,1}(r^2)$ abgeleitet werden (Müller, 2000).

Das Müllersche Verfahren wurde dahingehend erweitert, daß die Regression unempfindlich für Ausreißer wird. Dazu werden die Zeitsegmente für jede bivariate Gleichung getrennt nach Kohärenzen geordnet und von $n=1, \dots, N$ durchnummeriert mit $r_n^2 \leq r_{n+1}^2$. Es werden $k=1, \dots, K$ Klassen gleicher Klassenstärke gebildet. Jeder Klasse entspricht somit ein bestimmter Kohärenzbereich $[r_{k,\min}^2, r_{k,\max}^2]$ und es ist $r_{k,\max}^2 \leq r_{k+1,\min}^2$. Jede Klasse sollte mit mindestens 5 Segmenten besetzt sein, maximal werden 10 Klassen gebildet. Im nächsten Schritt wird für jede Klasse der Median getrennt für den Real- und Imaginärteil der für jedes Segment geschätzten Übertragungsfunktionen berechnet, z.B. für den Realteil von T_{xy} der k .ten Klasse

$$\Re(\hat{T}_{xy}^{(k)}) = \text{Med}\{\Re(\hat{T}_{xy,n}) : r_n^2 \in [r_{k,\min}^2, r_{k,\max}^2]\},$$

entsprechend wird der Median aus den Kohärenzen gebildet:

$$r_k^2 = \text{Med}\{r_n^2 : r_n^2 \in [r_{k,\min}^2, r_{k,\max}^2]\}$$

Daraufhin wird eine Regressionsgerade durch die Wertepaare $(r_k^2, \Re(\hat{T}_{xy}^{(k)}))$ gelegt. Der „bias-freie“ Wert wird abschließend aus der Regressionsgeradengleichung für $r^2 = 1$ berechnet. Die hier für den Realteil von T_{xy} angegebene Formulierung gilt entsprechend für die Imaginärteile und die übrigen Übertragungsfunktionen.

Beispiele

Abb.3 zeigt ein Beispiel für die Übertragungsfunktionen $T_{xx}^{RAUC, BRUN}(1\text{Hz})$ zwischen den B_x -Komponenten der Stationen RAUC und BRUN für die Frequenz von 1 Hz. Die Entfernung zwischen den Meßstationen beträgt 48 km. Die Übertragungsfunktionen und Kohärenzen wurden für aufeinanderfolgende Zeitsegmente von je 256 sec Länge aus einem Gesamtintervall von 9 Tagen berechnet (obere Abbildungen). Es sind keine systematischen zeitlichen Variationen, wie etwa ein Tagesgang, in den Werten zu erkennen. Die beiden horizontalen Linien in der Abbildung links oben stellen die Median-Werte aus allen Daten dar. Sie liegen für die Realteile bei 0.6 und für den Imaginärteil bei 0.3. Die unteren beiden Abbildungen zeigen die Medianwerte aus dem oben beschriebenen Verfahren für die Klassen $k=5, \dots, 10$. Die Werte aus den Klassen $k=1, \dots, 4$ sind auf Grund der niedrigen Kohärenz nicht aussagekräftig und deshalb nicht abgebildet. Während sich im Realteil der Bias-Effekt deutlich bemerkbar macht, sind die Imaginärteile unabhängig von der Kohärenz. Das bedeutet, daß auch in der Phase ein Bias vorhanden ist – entgegen gängigen Vorstellungen, daß die Phasen unemp-

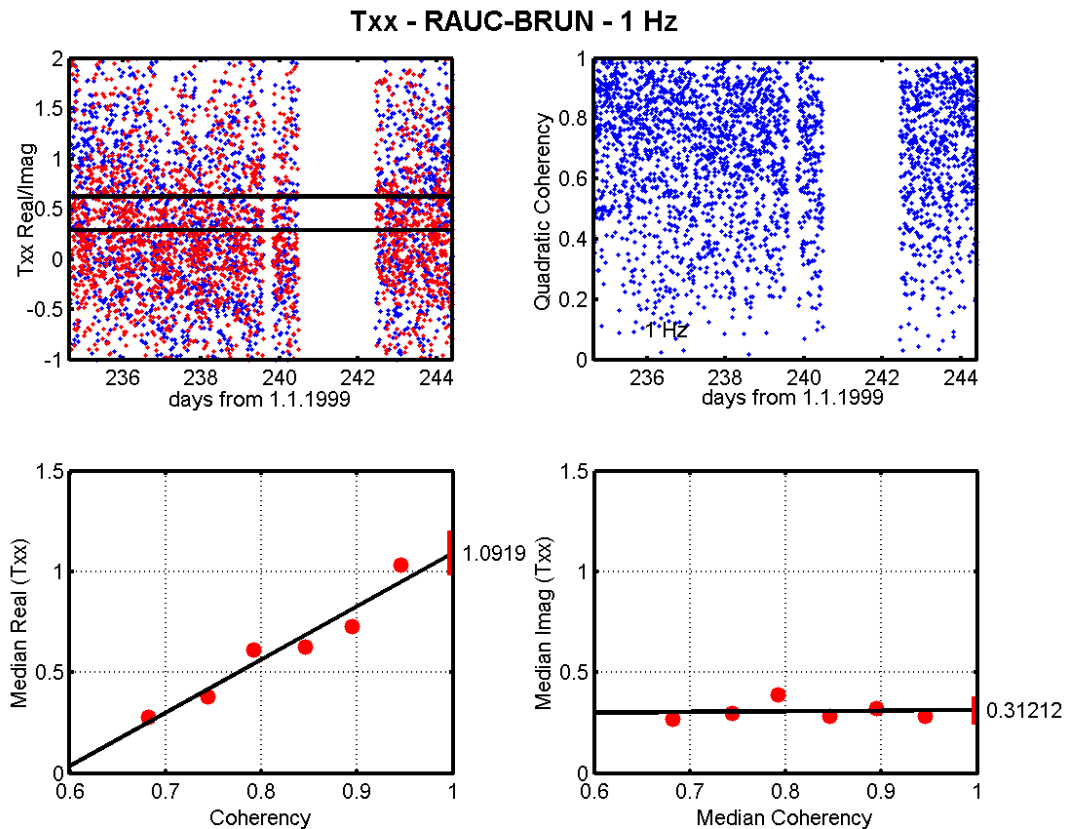


Abbildung 3: Zur Berechnung von Schätzwerten der Übertragungsfunktionen am Beispiel von $T_{xx}^{RAUC,BRUN}(1\text{Hz})$ für ein Zeitintervall von 9 Tagen. Links oben sind Realteil (blau) und Imaginärteil (rot) für aufeinanderfolgende Zeitsegmente abgebildet, rechts oben die quadratische Kohärenzen. Die unteren Abbildungen zeigen die Medianwerte von Realteil (links) und Imaginärteil (rechts) für $k=5, \dots, 10$.

findlich gegenüber systematischen Verzerrungen sind. Die Ursache könnte in der Überlagerung von Quellen mit unterschiedlicher Quellengeometrie liegen. Jeweils auf der rechten Ordinate in den unteren Abbildungen sind die asymptotischen Werte der Übertragungsfunktionen für $r^2 = 1$ angegeben, zusammen mit einem aus der Regression berechneten Fehler (dicker roter Balken, 68% Vertrauensbereich). Die Fehlerrechnung ist noch nicht ausgereift, erscheint aber als sinnvolle Möglichkeit, auf einfache Art zu einer ersten Abschätzung des Fehlers zu gelangen.

Die Abbildung 4 zeigt den Vergleich zwischen der neuen Analyse und der robusten Analyse nach dem herkömmlichen Schema. Dabei wurde die Station BRUN als fehlerfrei angenommen. Bei einem räumlich quasi-homogenen, anregenden Feld und homogenem Untergrund wäre $T_{ii} = 1 + (\sqrt{-1})0$ und $T_{ij} = T_{ji} = 0$. Abbildung 4 weicht deutlich von diesem Idealfall ab. Drastisch offenbart sich der Unterschied in den Hauptdiagonalelementen: In der neuen Analyse ist für Perioden oberhalb 1 sec $\Re(T_{xx}^{RAUC-BRUN}) \approx 1$, für kürzere Perioden strebt der Realteil zu Werten um 1.5. Letzteres deutet sich bei der herkömmlichen Analyse erst bei Perioden unterhalb von 0.5 sec an, im sogenannten „dead band“ zwischen 0.5-20 sec Periode bricht die Übertragungsfunktion ganz zusammen, für längere Perioden stabilisiert sie sich bei etwa 0.8.

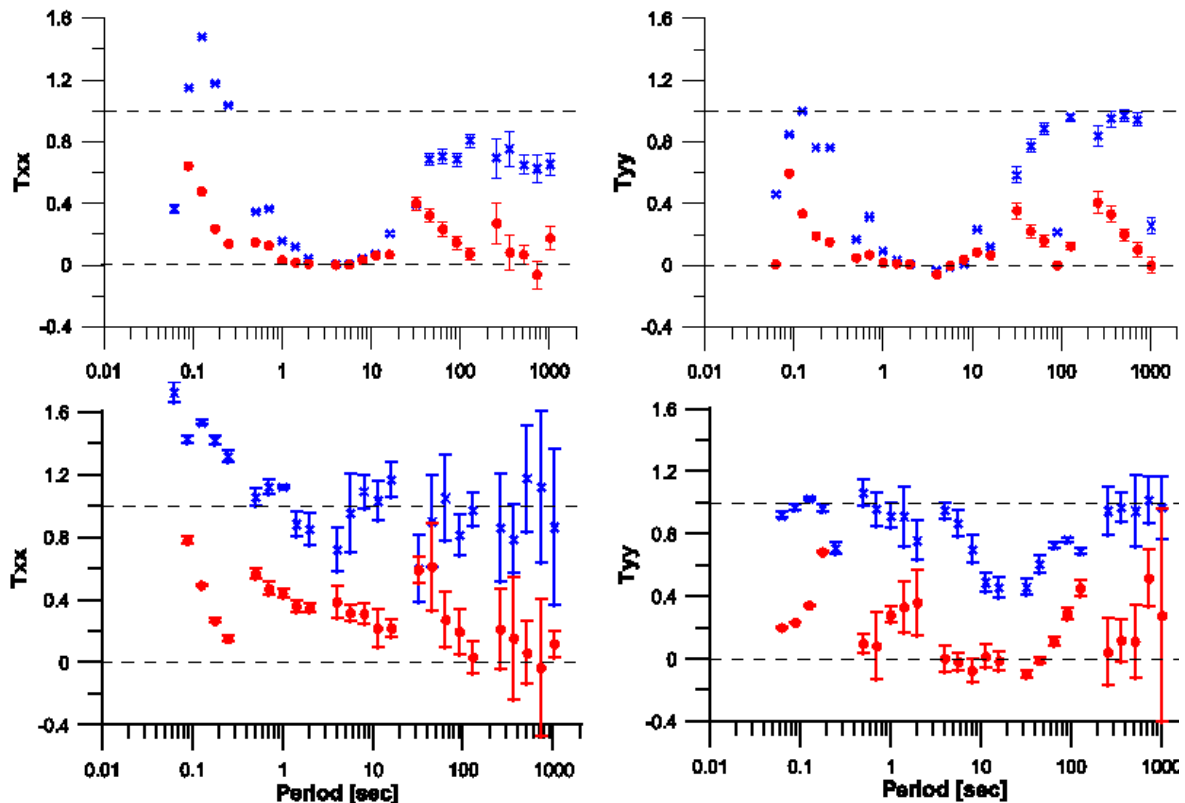


Abbildung 4: Vergleich der Übertragungsfunktionen $T^{\text{Rauc,Brun}}$ zwischen herkömmlicher (oben) und neuer (unten) Analyse für den Periodenbereich von 0.0625 – 1023 sec. Die Station BRUN wurde als fehlerfrei angenommen.

Schließlich sei noch auf die unterschiedliche Größe der Fehlerbalken in beiden Analyseverfahren hingewiesen. Angesichts der Streuung benachbarter Daten dürften die Vertrauensbereiche der herkömmlichen Analyse zu klein sein.

Anhand der Übertragungsfunktionen an der Station RAUC wird der Unterschied zwischen konventioneller und neuer Analyse für die komplexwertigen MT-Übertragungsfunktionen in Form des scheinbaren spezifischen Widerstandes und der Phase dargestellt (Abb.5). Zur besseren Übersicht wurden die Werte der neuen Analyse mit Symbolen und Fehlerbalken, die der konventionellen Analyse mit durchgezogenen Linien versehen. Für die kurzen Perioden unterhalb von 2 sec stimmen die Werte beider Analysen hervorragend überein. Danach nehmen Streuung und Fehlerbereiche deutlich zu, im letzten Frequenzband (256 sec – 1024 sec) ist die weitere Auswertung auf Grund der extremen Streuung und sehr großen Datenfehler sinnlos. Es fällt auf, daß die ρ_a -Werte der konventionellen Analyse oberhalb von 5 sec deutlich niedriger sind, während die Phasen im wesentlichen übereinstimmen. Offenbar ist dies ein bias Effekt, der durch die neue Analyseverfahren abgeschwächt wird.

Fazit

Die arithmetische Mittelung über Übertragungsfunktionen einzelner Zeitsegmente anstelle der Mittelung über Spektren führt gewöhnlich zu einer systematischen Verzerrung der geschätzten Übertragungsfunktion. Für den Median trifft dies wahrscheinlich nicht zu, der Beweis hierfür steht allerdings noch aus, ebenso wie die theoretisch fundierte Berechnung der Vertrauensbereiche. Der empirische Vergleich zwischen den beiden Analysemethoden zeigt, dass das neue Verfahren mindestens ebenso gute Ergebnisse liefert wie das herkömmliche, in einigen Fällen jedoch deutliche Verbesserungen systematisch verzerrter Schätzwerte aufweist.

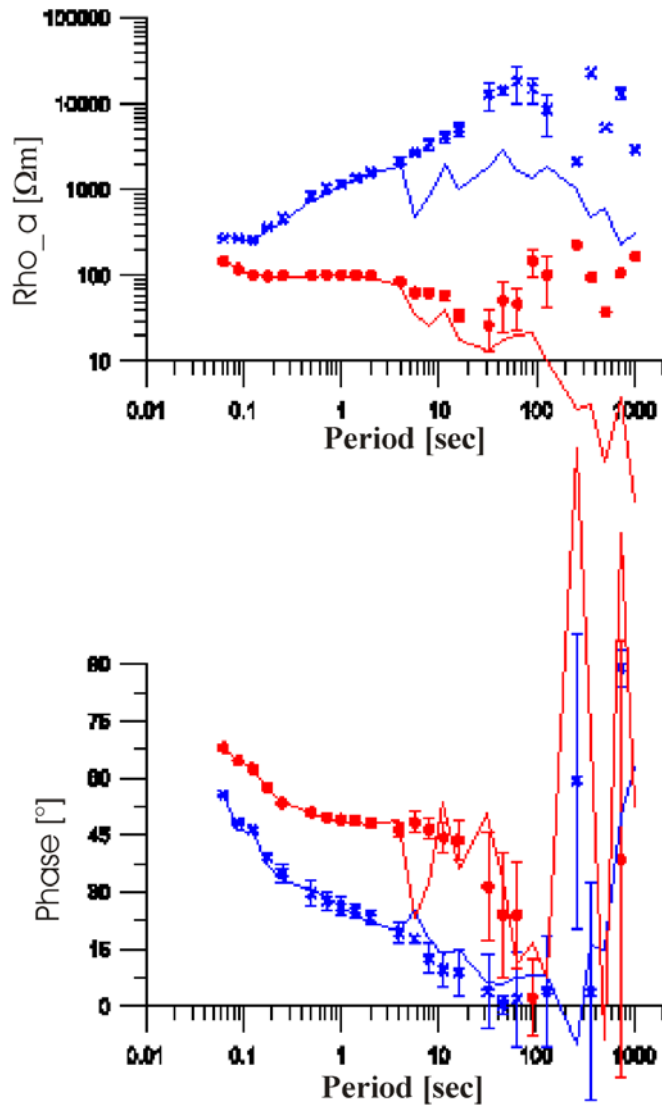


Abbildung 5: Vergleich von konventionellem (durchgezogene Linien) und neuem (Symbole mit Fehlerbalken) Auswerteverfahren am Beispiel von ρ_a (oben) und φ (unten) für Z_{xy} (blau) und Z_{yx} (rot) der Station RAUC. Der Periodenbereich erstreckt sich von 0,0625 sec – 1024 sec. Für Perioden oberhalb 8 sec ist besonders in $\rho_{a,xy}$ deutlich ein bias in den Daten der konventionellen Analyse zu erkennen, während sich die Phasen gleichen. Oberhalb von 100 sec Periode streuen die Werte stark, z.T. sind dort die Fehlerbalken so groß, daß sie der Übersicht halber nicht mit aufgetragen wurden.

Literatur:

Junge, A.: *Induzierte erdelektrische Felder -- neue Beobachtungen in Norddeutschland und im Bramwald*, Habil. Fachb. Physik Univ. Göttingen, 1994

Müller, A.: *A new method to compensate for bias in magnetotellurics*, Geophys. J. Int. **142**, 257-269, 2000

Ritter, O.: *An audiomagnetotelluric investigation of the Southern Upland Fault: novel instrumentation, field procedures and 3D modelling*. Ph.D. Thesis Dept. of Geology and Geophysics Edinburgh University, 1995

Ritter, O., Junge, A., Dawes, G.J.K.: *New Equipment and Processing for Magnetotelluric Remote Reference Observations*, Geophys. J. Int. **132**, 535-548, 1998

Smirnov, M. Yu.: *Magnetotelluric data processing with a robust statistical procedure having a high breakdown point*, Geophys. J. Int. **152**, 1-7, 2003