

# Simulation der Ausbreitung dreidimensionaler elektromagnetischer Felder im Zeitbereich: Formulierung als Anfangs- und Randwertproblem mittels Finite-Differenzen-Approximation

Ralph-Uwe Börner (TU Bergakademie Freiberg)

## 1 Einleitung

Die Methode der Transientelektromagnetik hat gegenüber anderen elektromagnetischen Verfahren gewisse Vorteile, die sich vor allem aus der Bandbreite des Sendesignals und der daraus resultierenden Möglichkeit einer simultanen Multifrequenzmessung ergeben. Bisher beschränkten sich die im Stadium der Messwertinterpretation abgeleiteten Aussagen auf einfache Leitfähigkeitsstrukturen, beispielsweise einen horizontal geschichteten Halbraum. Bei einer derartigen Restriktion der Modellklasse ist zu erwarten, dass die gemessenen Felder über zwei- oder dreidimensionalen Leitfähigkeitsstrukturen konsequent fehlinterpretiert werden. Es ist daher zunehmend interessant, die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in inhomogenen Medien auf effiziente Weise bei gleichzeitig hoher Genauigkeit numerisch zu simulieren.

Zur Lösung des Problems im Zeitbereich eignen sich sowohl implizite Verfahren auf der Grundlage der Finiten Differenzen oder Finiten Elemente als auch explizite Formulierungen auf der Basis von Zeitschrittverfahren. Auf gegeneinander verschobenen Finite-Differenzen-Gittern werden dabei Lösungen für das elektrische und magnetische Feld approximiert, die für einen gegebenen Zeitpunkt das System der Maxwellgleichungen erfüllen.

Explizite Verfahren sind aufwendig, da zur Gewährleistung der numerischen Stabilität kleine Zeitschritte gewählt werden müssen. Ferner müssen auf den Gitterpunkten des diskretisierten Gebietes Anfangswerte bereitgestellt werden, die das Zeitschrittverfahren initialisieren.

Im Folgenden soll die Formulierung des Anfangs- und Randwertproblems für eine Dipolquelle im homogenen leitfähigen Vollraum näher beschrieben werden.

## 2 Grundlagen

Unter quasistationärer Näherung lauten die Maxwellgleichungen im Zeitbereich

$$\nabla \times \mathbf{h}(\mathbf{r}, t) = \sigma(\mathbf{r})\mathbf{e}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}^e(\mathbf{r}, t) \quad (1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{b}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1c)$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{r}, t) = \mu(\mathbf{r})\mathbf{h}(\mathbf{r}, t), \quad (1d)$$

wobei  $\mathbf{e}$  und  $\mathbf{h}$  das elektrische bzw. magnetische Feld sowie  $\mathbf{b}$  die magnetische Flussdichte als Funktionen von Ort  $\mathbf{r}$  und Zeit  $t$  darstellen. Die magnetische Permeabilität  $\mu$  sei überall  $\mu = \mu_0$ , die elektrische Leitfähigkeit in der Erde wird durch  $\sigma(\mathbf{r})$  beschrieben. Für die von außen aufgeprägte Quellstromdichte  $\mathbf{j}^e$  soll gelten

$$\mathbf{j}^e = \begin{cases} \text{const}, & t < 0 \\ 0, & t > 0. \end{cases} \quad (2)$$

Das gekoppelte System gewöhnlicher Differentialgleichungen (1) soll unter der Nebenbedingung (1c) der Divergenzfreiheit von  $\mathbf{b}$  gelöst werden. Genanntes System ist als Anfangs- und Randwertaufgabe aufzufassen. Wir fragen nach der resultierenden Feldausbreitung infolge eines Ausschaltprozesses.

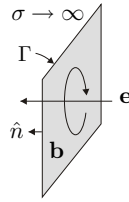


Abbildung 1: Verhalten der Felder auf dem Rand  $\Gamma$ . Beim Übergang in einen idealen elektrischen Leiter verschwinden die Tangentialkomponenten des elektrischen Feldes sowie die Normalkomponente des magnetischen Feldes.

### 3 Randbedingungen

Auf dem Rand  $\Gamma$  des diskretisierten Gebietes  $\Omega$  werden inhomogene Dirichletsche Randbedingungen vorgegeben (vgl. Abb. 1). Sei  $\hat{\mathbf{n}}$  der nach außen gerichtete Einheitsnormalenvektor auf  $\Gamma$ , so gilt

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (3a)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{e} = 0. \quad (3b)$$

Eine ideal leitende Umgebung von  $\Omega$  liefert die physikalische Interpretation dieser Randbedingung. Die Stetigkeit der Tangentialkomponenten von  $\mathbf{e}$  und  $\mathbf{h}$  im Innern von  $\Omega$  führt schließlich zur Beschreibung des Systems der Maxwellgleichungen auf einem versetzten Gitter (staggered grid), wobei die elektrischen Felder auf den Kanten und die magnetischen Felder auf den Flächen von Einheitszellen (Yee-Zellen) angeordnet werden (Yee, 1966).

### 4 Anfangsbedingungen

Für das gesamte Gebiet  $\Omega$  werden Startwerte für den Zeitpunkt  $t = t_0$  benötigt, von dem aus sich das System der Maxwellgleichungen (1) entwickelt. Damit ergibt sich folgendes Anfangs- und Randwertproblem:

$$\text{Gleichungssystem (1) in } \Omega \quad (4a)$$

$$\mathbf{h}(t), \mathbf{e}(t) \text{ auf } \Gamma \quad (4b)$$

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}) \text{ für } t = t_0 \quad (4c)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{r}) \text{ für } t = t_0. \quad (4d)$$

Die Anfangswerte der Felder für Zeiten kurz nach dem Abschalten des Stromes müssen für das gesamte Gebiet  $\Omega$  vorgegeben werden.

Zur Untersuchung der numerischen Eigenschaften des eingesetzten Zeitschrittverfahrens verwenden wir eine magnetische Dipolquelle im leitfähigen Vollraum, für deren Felder im Zeitbereich analytische Ausdrücke zur Verfügung stehen.

Für einen in  $z$ -Richtung orientierten magnetischen Dipol im Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems können die Felder von einem Skalarpotential

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = F(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{z}} \quad (5)$$

abgeleitet werden (Ward und Hohmann, 1988), wobei für die Kreisfrequenz  $\omega$

$$F(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{4\pi r} e^{-ikr} \text{ mit } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad k = \sqrt{i\omega\mu_0\sigma} \quad (6)$$

die Greensche Funktion für den leitfähigen Vollraum im Frequenzbereich (*impulse response*) darstellt. Für den Ausschaltvorgang (2) erhält man als Sprungfunktionsantwort (*step response*) folgende Feldkomponenten im Zeitbereich:

$$e_x(r, t) = -c_0(r, t) \frac{y}{r} \quad (7a)$$

$$e_y(r, t) = c_0(r, t) \frac{x}{r} \quad (7b)$$

$$h_x(r, t) = c_1(r) \frac{zx}{r^2} (3 - c_2(r, t)) \quad (7c)$$

$$h_y(r, t) = c_1(r) \frac{zy}{r^2} (3 - c_2(r, t)) \quad (7d)$$

$$h_z(r, t) = c_1(r) \left[ \frac{z^2}{r^2} (3 - c_2(r, t)) - 1 + c_3(r, t) \right] \quad (7e)$$

mit den Koeffizienten

$$c_0(r, t) = \frac{\mu_0 m \theta^3 r}{2\pi^{3/2} t} e^{-\theta^2 r^2}, \quad \theta = \sqrt{\frac{\mu_0 \sigma}{4t}} \quad (8a)$$

$$c_1(r) = \frac{1}{4\pi r^3} \quad (8b)$$

$$c_2(r, t) = \left( \frac{4}{\pi^{1/2}} \theta^3 r^3 + \frac{6}{\pi^{1/2}} \theta r \right) e^{-\theta^2 r^2} + 3 \operatorname{erfc}(\theta r) \quad (8c)$$

$$c_3(r, t) = \left( \frac{4}{\pi^{1/2}} \theta^3 r^3 + \frac{2}{\pi^{1/2}} \theta r \right) e^{-\theta^2 r^2} + \operatorname{erfc}(\theta r). \quad (8d)$$

Damit steht für jeden Zeitpunkt und jede Raumkoordinate eine analytische Referenz zur Verfügung, mit der die im Verlauf der Simulationsrechnung ermittelten Feldgrößen hinsichtlich ihrer Abweichungen verglichen werden können.

## 5 Räumliche und zeitliche Diskretisierung des Zeitschrittverfahrens

Der Vollraum wird in  $n_x \times n_y \times n_z$  Quader der Kantenlängen  $\Delta x_i$ ,  $i = 1 \dots n_x$ ,  $\Delta y_j$ ,  $j = 1 \dots n_y$  sowie  $\Delta z_k$ ,  $k = 1 \dots n_z$  mit jeweils konstanter elektrischer Leitfähigkeit zerlegt. Benutzt wird ein rechtshändiges kartesisches Koordinatensystem mit  $z$  positiv nach unten. Die Felder auf der Yee-Zelle bilden elektrische und magnetische Schleifen, auf denen die Maxwellgleichungen approximiert werden (Abb. 2).

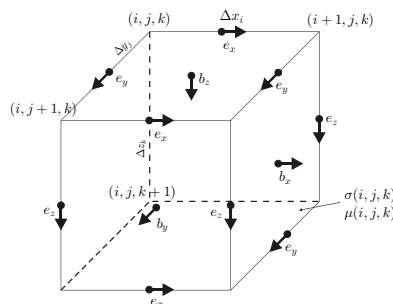


Abbildung 2: Position der elektrischen und magnetischen Feldkomponenten in der Yee-Zelle.

Die hier gegebene Darstellung bezieht sich im wesentlichen auf die von Wang und Hohmann (1993) sowie Weidelt (2000). Wir bezeichnen die Indizes der zeitlichen Diskretisierung mit  $0, 1, \dots, n$ . Die elektrischen Felder sind auf ganzzahligen, die magnetischen Felder auf halbzahligen Indizes definiert. Die  $x$ -Komponente des magnetischen Feldes von (1b) lautet

$$-\frac{\partial h_x}{\partial t} = \mu_0^{-1} \left( \frac{\partial e_z}{\partial y} - \frac{\partial e_y}{\partial z} \right). \quad (9)$$

Mit Hilfe der Schreibweise

$$\hat{\mathbf{x}} \cdot (\nabla_h \times \mathbf{f})^n \approx \frac{\partial f_z^n}{\partial y} - \frac{\partial f_y^n}{\partial z} \quad (10)$$

soll die FD-Approximation der  $x$ -Komponente der Rotation des Feldes  $\mathbf{f}$  für den  $n$ -ten Zeitschritt symbolisch beschrieben werden. Andere Komponenten ergeben sich durch entsprechende Wahl des Einheitsvektors ( $\hat{y}$  oder  $\hat{z}$ ). Approximierte partielle Ableitungen für den  $n$ -ten Zeitschritt werden z.B. durch

$$\left( \frac{\partial h_x}{\partial x} \right)_i^n = \frac{h_x^n(i+1, j+1/2, k+1/2) - h_x^n(i, j+1/2, k+1/2)}{\Delta x_i} \quad (11)$$

abgekürzt. Weiterhin soll die zeitliche Änderungsrate von  $h_x$  näherungsweise durch

$$\left( \frac{\partial h_x}{\partial t} \right)^n \approx \frac{h_x^{n+1/2} - h_x^{n-1/2}}{\Delta t} \quad (12)$$

bestimmt werden. Das Magnetfeld  $h_x$  zum Zeitpunkt  $n+1/2$  ergibt sich damit zu

$$h_x^{n+1/2}(i, j+1/2, k+1/2) = h_x^{n-1/2}(i, j+1/2, k+1/2) - \frac{\Delta t}{\mu_0} [\hat{\mathbf{x}} \cdot (\nabla_h \times \mathbf{e})^n]. \quad (13)$$

Die Berechnung der übrigen Komponenten von  $\mathbf{h}$  erfolgt mit entsprechender Anwendung von Gl. (10) im letzten Term von (13). In Abb. 3 sind die über Finite Differenzen aus vorgegebenen Größen  $e_x$  und  $e_y$  berechneten Felder  $h_x$  und  $h_z$  im Vergleich mit den analytischen Lösungen zusammengestellt. Deutlich erkennbar sind die z.T. größeren Abweichungen vom erwarteten Wert, insbesondere für die Horizontalkomponenten. Diese berechnen sich über Vertikalableitungen horizontaler elektrischer Felder, die zu späten Zeiten sehr kleine Werte annehmen. Da einerseits für späte Simulationszeiten die zeitliche Änderungsrate des magnetischen Feldes nahezu verschwindet, also

$$\mu_0^{-1} \nabla \times \mathbf{e} = -\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} \approx 0 \quad (14)$$

gilt, andererseits die Nebenbedingung (1c) für  $t > 0$  nicht mehr erfüllt wird (vgl. Abb. 4), muss die Divergenzfreiheit von  $\mathbf{b}$  daher zu späten Simulationszeiten explizit gefordert werden, und zwar mit dem Update der  $z$ -Komponente von  $\mathbf{h}$ :

$$h_z^{n+1/2}(i+1/2, j+1/2, k) = h_z^{n+1/2}(i+1/2, j+1/2, k+1) - \Delta z_k \left[ \left( \frac{\partial h_x}{\partial x} \right)_i^{n+1/2} + \left( \frac{\partial h_y}{\partial y} \right)_j^{n+1/2} \right]. \quad (15)$$

Das vertikale Magnetfeld wird dabei z.B. vom unteren Rand her nach oben fortgesetzt.

Die beschriebene Vorgehensweise liefert jedoch nur bei hinreichend kleinen Gitterabständen genaue Updates.

In Abb. 4 ist neben einer numerischen Bestimmung von  $\nabla \cdot \mathbf{b}$  die Abhängigkeit der Genauigkeit von der Gittergeometrie dargestellt. Die FD-Approximation der im Divergenzoperator auftretenden Ableitungen führt bei größer werdendem Gitter zu Fehlern, die nicht mehr vernachlässigt werden können.

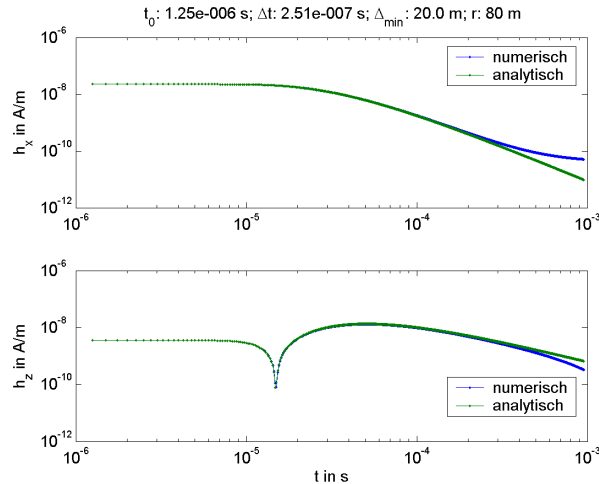


Abbildung 3: Vergleich zwischen numerischer und analytischer Berechnung der Magnetfeldkomponenten  $h_x$  und  $h_z$  in einem Vollraum mit  $\sigma = 0.01$  S/m. Der Abstand von der Dipolquelle beträgt 80 m. Aus Symmetriegründen kann auf die Darstellung von  $h_y$  verzichtet werden.

Der Versuch, Gl. (1a) mit der geschilderten FD-Approximation zu lösen, führt zu stark oszillierenden Updates für die elektrischen Felder (vgl. Abb. 5). Zu frühen Zeiten variiert das elektrische Feld in innerhalb gewisser Grenzen, die einerseits von rein quasistationärem Verhalten und andererseits von nicht-diffusivem Wellenverhalten geprägt sind. Das Feld nähert sich im Intervall  $t=10^{-5}$  bis  $10^{-4}$  s asymptotisch dem erwarteten Verhalten an, während es zu späteren Zeiten wiederum stärker oszilliert.

Eine numerisch stabile Lösung von (1) wird erst durch Einführung einer künstlichen Verschiebungsstromdichte in (1a) gewährleistet:

$$\gamma \frac{\partial \mathbf{e}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \sigma(\mathbf{r}) \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{h}(\mathbf{r}, t). \quad (16)$$

Die  $y$ -Komponente von (16) lautet damit z.B.

$$\gamma \frac{\partial e_y}{\partial t} + \sigma e_y = \frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x}. \quad (17)$$

Durch Mittelung der elektrischen Felder zweier aufeinanderfolgender Zeitschritte gemäß

$$e_y^{n+1/2} \approx \frac{e_y^n + e_y^{n+1}}{2} \quad (18)$$

kann mit dem aus Zeitschritt  $n + 1/2$  ermittelten magnetischen Feld ein Update für  $e_y$  berechnet werden:

$$e_y^{n+1}(i, j + 1/2, k) = \frac{2\gamma - \Delta t \sigma(i, j + 1/2, k)}{2\gamma + \Delta t \sigma(i, j + 1/2, k)} e_y^n(i, j + 1/2, k) + \frac{2\Delta t}{2\gamma + \Delta t \sigma(i, j + 1/2, k)} \left[ \left( \frac{\partial h_x}{\partial z} \right)_k^{n+1/2} - \left( \frac{\partial h_z}{\partial x} \right)_i^{n+1/2} \right]. \quad (19)$$

Die Gitterabstände beziehen sich hier auf die Abstände zwischen den Magnetfeldpositionen auf den Flächen der Yee-Zelle (vgl. Abb. 2). Ferner müssen die Leitfähigkeiten der vier Zellen, die an die entsprechenden Komponenten von  $\mathbf{e}$  angrenzen, flächengewichtet gemittelt werden. Für die Berechnung von  $e_x$  und  $e_z$  sind die Updateformeln entsprechend anzuwenden. In Abb. 7a sind numerische und analytische Lösung unter Einbeziehung

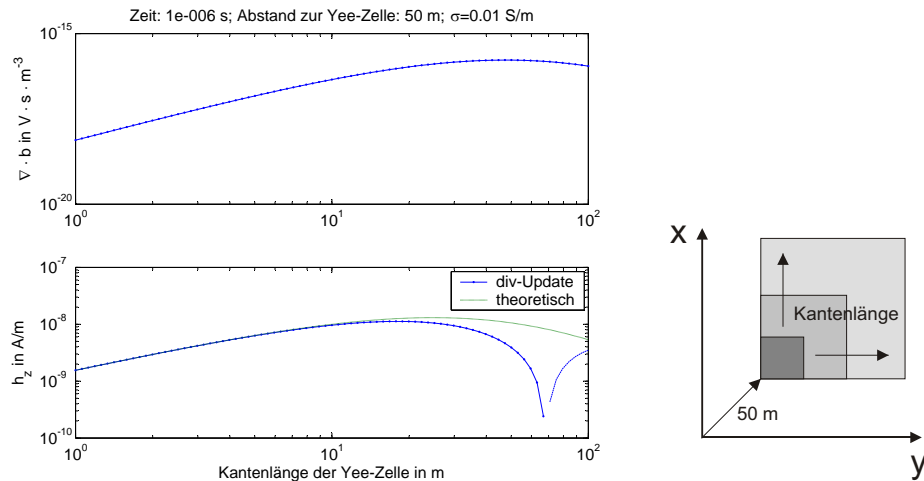


Abbildung 4: Numerische Bestimmung von  $\nabla \cdot \mathbf{b}$  innerhalb einer Yee-Zelle. Dargestellt ist die Abhängigkeit der Divergenz von der Kantenlänge einer würfelförmigen Yee-Zelle, wobei der Abstand zwischen Dipol und der Zelle 50 m beträgt. Das aus der Divergenz von  $\mathbf{b}$  berechnete vertikale Magnetfeld  $h_z$  weicht auf Grund der verwendeten Finite-Differenzen-Approximation für Kantenlängen größer 10 m erheblich vom erwarteten Wert ab.

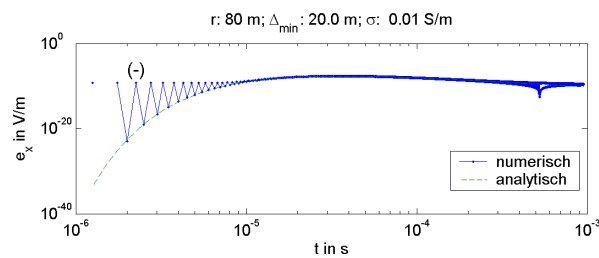


Abbildung 5: Oszillierendes Verhalten der E-Feld-Updates bei Vernachlässigung der Verschiebungsstromdichte.

der künstlichen Verschiebungsstromdichte dargestellt. Deutlich erkennbar ist die wesentlich bessere Stabilität der numerischen Lösung insbesondere zu späten Simulationszeiten. Durch die Verwendung von Finite-Differenzen-Approximationen höherer Ordnung kann die Genauigkeit zu Lasten der numerischen Effizienz gesteigert werden (Wang und Hohmann, 1993).

## 6 Numerische Stabilität

Ein einfaches Verfahren zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen ist durch die Euler-Methode gegeben, welche eine Lösung zwischen den diskreten Zeitpunkten  $t_n$  und  $t_{n+1}$  durch den Zeitschritt  $\Delta t$  über Ableitungen approximiert. Bei einer vorgegebenen räumlichen Diskretisierung kann  $\Delta t$  nicht beliebig gewählt werden, sondern unterliegt einer Beschränkung hinsichtlich seiner oberen Schranke. Die Courant-Friedrich-Lévy-Bedingung (Courant *et al.*, 1928) wählt  $\Delta t$  gerade so, dass die Euler-Methode genaue und stabile Ergebnisse erzeugt. Das

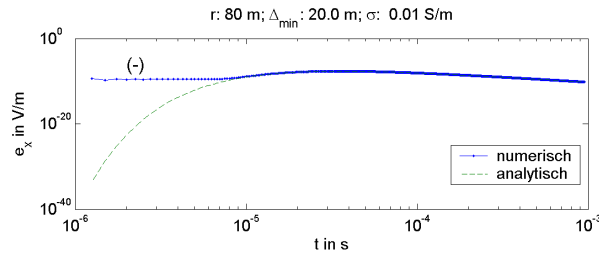


Abbildung 6: Vergleich zwischen numerisch über (19) sowie analytisch über (7a) berechnetem elektrischen Feld.

Du Fort-Frankel-FD-Schema (DuFort und Frankel, 1953) beschränkt den Zeitschritt auf

$$\Delta t \ll \left( \frac{\mu_0 \sigma t}{6} \right)^{1/2} \Delta_{min}, \quad (20)$$

was durch Setzen von

$$\gamma \geq \frac{3}{\mu_0} \left( \frac{\Delta t_n}{\Delta_{min}} \right)^2 \quad (21)$$

in (16) den diffusiven Charakter der Feldausbreitung sicherstellt.

## 7 Numerisches Beispiel

In diesem Abschnitt sollen die Ergebnisse der numerischen Simulationsrechnungen mit analytischen Lösungen verglichen werden. Für ein Modell mit homogener elektrischer Leitfähigkeit und einer Kantenlänge von 2 km wurden für ein logarithmisch äquidistantes Gitter mit 54x54x54 Zellen kartesische Komponenten des elektrischen und magnetischen Feldes berechnet. Versuche mit äquidistanten Gittern lieferten wesentlich größere Fehler, da die verwendete Randbedingung (3) nur mit großen Abständen zur Quelle befriedigende Ergebnisse liefert. Logarithmisch äquidistante Gitter erfüllen diese Forderung bei gleichzeitig vertretbarem Diskretisierungsaufwand.

In Abb. 7 ist das vertikale Magnetfeld für einen Abstand von 71 m vom vertikalen magnetischen Dipol mit dem Moment 1 A·m<sup>2</sup> als Funktion der Zeit dargestellt. Die Abweichungen zwischen simuliertem und analytischem Feld sind zufriedenstellend gering. Die Zeitschritte wurden im Laufe der Simulation gemäß (20) vergrößert, was zu einer wesentlichen Beschleunigung der Rechnung beiträgt. Die Wirksamkeit des Divergenzupdates für  $h_z$  wird

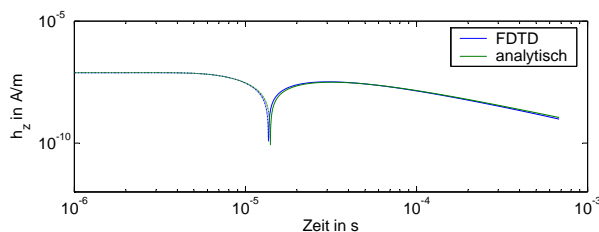
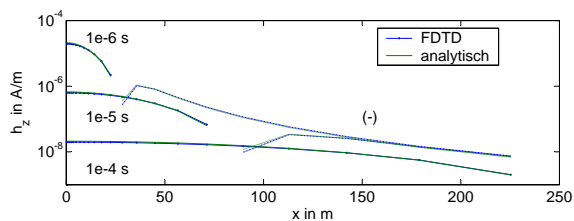
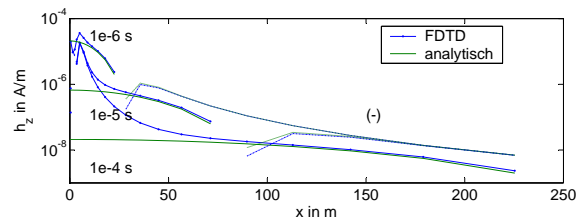


Abbildung 7: Vertikales Magnetfeld einer vertikalen magnetischen Dipolquelle im Abstand von 71 m innerhalb eines homogenen Vollraums der Leitfähigkeit 0.01 S/m.

in Abb. 8 belegt. Besonders zu späten Simulationszeiten sind die Abweichungen vom erwarteten Wert erheblich.

(a) mit Nebenbedingung  $\nabla \cdot b = 0$ 

(b) ohne Nebenbedingung

Abbildung 8: Profildarstellung des Vertikalkomponente des Magnetfeldes ( $h_z$ ) für  $y=0.5$  m,  $z=0$  m mit bzw. ohne Nebenbedingung. Der magnetische Dipol befindet sich bei  $x = 0$  m.

## 8 Zusammenfassung

Mittels Zeitschrittverfahren und Yee-Diskretisierung wurde versucht, das System der Maxwellgleichungen in quasistationärer Näherung numerisch zu lösen. Das Verfahren zeigt für eine magnetische Dipolquelle im homogenen Vollraum gute numerische Eigenschaften. Die Beschränkung auf den Vollraum ist insofern zweckmäßig, als nur so die Besonderheiten des Finite-Differenzen-Verfahrens im Vergleich zu analytischen Lösungen untersucht werden können. Die Erweiterung auf Dipolquellen an der Oberfläche des leitfähigen Halbraums ist einfach zu realisieren, wobei die hier gemachten Erfahrungen einen wertvollen Beitrag liefern.

## Literatur

- Courant, R., Friedrich, K. und Levy, H. (1928). Über die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik. *Math. Ann.*, 100, 32.
- DuFort, E., und Frankel, S. (1953). Stability conditions in the numerical treatment of parabolic differential equations. *Math. tables and other aids to comput. (former title of Math. Comput.)*, 7, 135-152.
- Wang, T., und Hohmann, G. (1993). A finite-difference, time-domain solution for three-dimensional electromagnetic modelling. *Geophysics*, 58, 797-809.
- Ward, S., und Hohmann, G. (1988). Electromagnetic theory for geophysical applications. In M. Nabighian (Hrsg.), *Electromagnetic methods in applied geophysics*. Soc. Expl. Geoph.
- Weidelt, P. (2000). Numerical modelling of transient-electromagnetic fields in three-dimensional conductors: A comparative study. In A. Hördt und J. Stoll (Hrsg.), *Protokoll 18. Kolloquium "Elektromagnetische Tiefenforschung"* (S. 216-230). Altenberg.
- Yee, K. (1966). Numerical solution of initial boundary problems involving Maxwell's equations in isotropic media. *IEEE Trans. Ant. Propag.*, 14, 302-309.