# **2D-Inversion von Daten der Spektralen Induzierten Polarisation**

R. Blaschek, A. Hördt (Bonn), A. Kemna (Jülich), J. Suckut (Bonn)

# Einleitung

Ziel der Arbeit ist es, bei einer 2D-Inversion von Daten der Spektralen Induzierten Polarisation (SIP) geologisch realistischere Untergrundmodelle zu erhalten, als dies bisher möglich ist. Der Weg dorthin führt über geänderte Regularisierungen.

Bei 2D-Inversionen tritt in der Regel ein stark unterbestimmtes Gleichungssystem auf, sodass man neben einer guten Anpassung der Modelldaten an die Messdaten ein weiteres Kriterium benötigt, um aus der Vielzahl gleich gut angepasster Modelle das geologisch realistischste herauszufiltern. Die oft benutzte Occam-Bedingung (DeGroot-Hedlin und Constable, 1990), die immer ein möglichst glattes Untergrundmodell bevorzugt, soll hier abgeändert werden, da wir scharfe Grenzen in den Parametern zulassen wollen. Bei klaren Schichtungen entspricht dies eher der Realität als die stark geglätteten Modelle. Das benutzte Prinzip ist hierbei nicht auf 2D-Inversionen von SIP-Daten oder Finite-Elemente Algorithmen (wie er hier benutzt wird) beschränkt, sondern grundsätzlich immer als Alternative zu einer Occam-Glättung denkbar.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, anstelle von Glättungsbedingungen fokussierende Nebenbedingungen einzusetzen, um bestimmte Störkörper oder Schichtgrenzen besser aufzulösen. Genannt werden sollen hier die Ansätze von Portniaguine und Zhdanov (1999) und Yi et al (2003), die später noch benötigt werden, sowie Ellis und Oldenburg (1994), stellvertretend für ein Vielzahl von Ideen. Portniaguine und Zhdanov verfolgen hierbei den Ansatz, dass nicht in erster Linie Kontraste geglättet, sondern die Flächen, wo sie auftreten, minimiert werden sollen. Nach Yi et al wollen, dass bei der Regularisierung die Ortsabhängigkeit des Auflösevermögens berücksichtigt wird und Ellis und Oldenburg plädieren für ein verstärktes Nutzen von Vorinformationen, wobei in der Nebenbedingung die Differenz zu einem Referenzmodell minimiert wird.

In der vorliegenden Arbeit werden einige neue Ansätze und deren spezielle Anwendung auf SIP-Daten untersucht. Der erste lässt das Verwenden von Vorinformationen über Grenzflächen zu und liefert stark verbesserte Ergebnisse. Daraus resultierend soll ein weiterer Algorithmus ohne Vorinformation Grenzflächen eigenständig interpretieren und an geeigneten Stellen scharfe Kontraste zulassen. Die letzte Version überführt die qualitativen Frage, ob an einer Kante eine scharfe Grenze auftreten darf oder nicht, in den quantitativen Aspekt, wie stark eine Kante, abhängig vom Kontrast, gewichtet werden soll.

# Grundlagen

Die SIP gehört zu den aktiven Verfahren der Widerstandsmethoden. Dabei wird durch ein Elektrodenpaar ein Wechselstrom in den Boden eingespeist und an einem anderen Paar die Spannung aufgezeichnet. Wegen der inneren Struktur des Bodens ergibt sich in der Beziehung zwischen dem Signal des eingespeisten Stroms und der gemessenen Spannung nicht nur ein Faktor aufgrund des ohmschen Widerstandes, sondern auch eine Phasenverschiebung. Eine einfache analoge Vorstellung ist die eines Kondensators in einem Wechselstromkreis. Folglich misst man neben dem Betrag des scheinbaren Widerstandes auch einen Wert für die Phase, der meist in Größenordnungen von einigen mrad liegt. Für jede Frequenz erhält man somit ein Wertepaar pro Messpunkt, das auch zu einem komplexwertigen Widerstand zusammengesetzt wird. Wir messen im Frequenzbereich von etwa einem Zehntel bis 10000 Hz. Hierbei spielt im oberen Frequenzen unabhängig invertiert werden und somit auch die unteren Frequenzen separat ohne die Hochfrequenzprobleme betrachtet werden können, wird eine Korrektur hierfür gegenwärtig noch

nicht benötigt. Weiterführendes zur Methode der Spektralen Induzierten Polarisation findet sich beispielsweise bei Knödel et al. (1997).

Die Inversion der Daten erfolgt über einen 2D-Algorithmus auf Basis der Finiten Elemente nach Kemna (2000), der in einigen Punkten erweitert wurde.

## Die Änderungen der Glättungsbedingung

#### Verallgemeinerung des Inversionsgitters zum Verwenden von Vorinformationen

Im einfachsten Fall will man starke Kontraste nicht nur zulassen, sondern kennt bereits die Lage der Grenzflächen, an denen sie auftreten. Dies könnte beispielsweise durch Vorinformationen aus seismischen Messungen geschehen.

Der Basisalgorithmus benutzt eine übliche Occam-Glättung. Bei dieser Regularisierung wird neben einer Anpassung der synthetischen an die Felddaten ein möglichst glattes Modell gefordert. Bei der Glättung über die Kanten der Flächenelemente fließt noch die Zellgeometrie ein, sodass z.B. ein gleicher Parametersprung bei größerem Mittelpunktsabstand zwischen den benachbarten Stellen geringer ,bestraft' wird. Insgesamt wirkt die Glättungsbedingung scharfen Kontrasten immer entgegen. Genau dies soll aber nicht an den bekannten Schichtgrenzen aus den Vorinformationen geschehen. Hier sollen starke Sprünge auftreten können. Für die Umsetzung variiert man die Nebenbedingung, indem man das Gebiet so in Zellen zerlegt, dass die Schichtgrenzen genau mit Zellkanten zusammenfallen, und für die entsprechenden Kanten die Glättungsbedingung ausschaltet. Die Kanten werden bei der Berechnung der Gesamtrauhigkeit einfach übergangen. Im speziellen Fall musste noch der Inversionsteil des Algorithmus auf allgemeinere Zerlegungen des Untergrundes erweitert werden, da die bisher nur akzeptierten Rechteckszellen in x-z- Ausrichtung zu unflexibel für eine allgemeine Nachbildung von Schichtgrenzen oder Störkörperrändern waren. Nun können auch Dreieckszerlegungen mit beliebigen Kantenrichtungen gerechnet werden.

Ein Ergebnis für synthetische Daten ist in Abbildung 1 dargestellt, im Vergleich Inversion mit und ohne Vorinformationen. Sowohl in Betrag als auch Phase (nicht aufgeführt) wird das Ausgangsmodell praktisch exakt reproduziert. Der Störkörper hat einen Betrag von  $10\Omega m$  und Phase 20mrad bei einem Hintergrund von  $100\Omega m$  und 5mrad. Die Grenzen des Körpers sind eingezeichnet. Simuliert wurde eine Oberflächenmessung mit 189 Dipolkonfigurationen. Wenn man noch die übliche Inversion ohne Nutzen der Vorinformationen betrachtet, so ist die Verbesserung doch als sehr stark zu bezeichnen. Hier bleibt also festzuhalten, dass es in jedem Fall sinnvoll ist, Vorinformationen –falls vorhanden- bereits in die Inversion einzubeziehen. Leider sind in der Praxis genaue Kenntnisse über die Lage von Diskontinuitätsrändern eher selten, woraus sich die Frage ergibt, inwieweit der besprochene Ansatz auch ohne Vorinformationen verfolgt werden kann. Dieser Frage wird im folgenden nachgegangen.

#### Automatische Strukturerkennung

Es stellt sich heraus, dass es auch ohne Vorinformationen sinnvoll sein kann, an bestimmten Kanten die Glättungsbedingungen aufzuheben. Dies ist der Fall, wenn der Algorithmus dahin tendiert (trotz Occam-Glättung), an einer Stelle einen großen Kontrast zu produzieren. In diesem Fall kann man ihn darin unterstützen, indem man an den entsprechenden Kanten die Glättungsbedingung aufhebt. Mehrere kritische Punkte sind allerdings zu berücksichtigen:

Zunächst benötigt man ein möglichst objektives Kriterium, um zu entscheiden, ab welchem Kontrast eine Kante aus der Glättungsbedingung entkoppelt werden soll. Hierbei wird als einfaches Kriterium Mittelwert und Standardabweichung gewählt. Unter Einbeziehung der Zellgeometrie und Lage (an Punkten geringerer Sensitivität bei sonst gleichem Kontrast wird eher entkoppelt) werden Mittelwert und Standardabweichung der Parameterdifferenzen über alle Kanten zwischen Flächenelementen bestimmt. Wenn die Parameterdifferenz an einer Kante stark über dem Mittelwert liegt (z.B. mehr als zwei Standardabweichungen), werden Kanten entkoppelt - also nicht mehr in der Nebenbedingung bei der Berechnung der Gesamtrauhigkeit benutzt. Der Eintrag in der Rauhigkeitsmatrix wird einfach gelöscht oder sehr klein gesetzt.



*Abbildung 1*: Betrag des spezifischen elektrischen Widerstandes (logarithmisch) nach Inversion mit (oben) und ohne (unten) Nutzen der Vorinformationen. Grenzen des Störkörpers eingezeichnet.

Ein weiterer Aspekt ist die Festlegung des Zeitpunktes im Inversionsablauf, ab dem die Entkopplung angewendet werden soll. Einerseits soll dem Algorithmus die Möglichkeit gegeben werden, erst eine Tendenz auszubilden, andererseits soll auch nach dem Entkoppeln noch einige Iterationen der Kontrast verbessert werden können. Da sich eine Modell-unabhängige Lösung nicht findet, kann man auch die Frage stellen, ob nicht nach jeder Iteration die zu entkoppelnden Kanten neu bestimmt werden sollen. Dann wechselt allerdings ständig die Anzahl der zu berücksichtigenden Kanten, gerade bei solchen mit recht starken Kontrasten. Der Algorithmus liefert damit von Iteration zu Iteration starke Sprünge in der Datenanpassung und konvergiert nicht stetig. Ständig ändert sich das Verhältnis der Beiträge zwischen Datenanpassung und Nebenbedingung in der globalen Zielfunktion und der Gewichtungsfaktor für die Nebenbedingung muss stark korrigiert werden.

Ein anderes Problem ist, dass die entkoppelten Kanten eine Schichtgrenze oder einen Störkörperrand evtl. nicht zusammenhängend nachbilden und so durch die offenen Teile der Kontrast recht schnell wieder ,herausfließt'. Das Ergebnis ist deutlich kontrastärmer als gewünscht. Als Beispiel sind in den Abbildungen 2 und 3 Ergebnisse im Vergleich mit der üblichen Inversion gezeigt. Die entkoppelten Kanten (Abb. 2, oben) bilden kein geschlossenes Gebiet und im Gegensatz zu dem sehr scharfen Kontrast, wie er in Abb. 1 (oben) zu sehen ist, ist die Verbesserung nur noch deutlich schwächer.





Mitte und unten: Betrag des spezifischen elektrischen Widerstandes (logarithmisch) nach Inversion mit (Mitte) und ohne (unten) Nutzen des Algorithmus für die Kantenentkopplung. Grenzen des Störkörpers eingezeichnet.

Die sinnvollste Möglichkeit, die sich ohne inakzeptabel großen numerischen Mehraufwand ergibt, ist es, über wenige Iterationen nach dem Start die Entwicklung der Diskontinuitäten zu beobachten, die man sich leicht grafisch ausgeben lassen kann, und nach einem Abbruch die angedeuteten Störkörpergrenzen von Hand zu vervollständigen und bei festgehaltenen Grenzen einen neuen Inversionslauf zu starten. Unbefriedigend bleibt natürlich das Eingreifen per Hand mit der damit verbundenen subjektiven Entscheidung, wie die Grenzen der Diskontinuitäten zu vervollständigen sind.

#### Neuere Ansätze in der Glättungsbedingung

Da die Sprünge durch Zu- und Abschalten der Glättungsbedingung für einzelne Kanten die Inversion gestört haben, liegt die nächste Verbesserung in einem Übergang zu kontinuierlichen Gewichtungen. Diesen Ansatz verfolgen Portniaguine und Zhdanov (1999) im sogenannten "minimum gradient support". Hierbei wird versucht, die Fläche (oder Gesamtlänge der Kanten) zu minimieren, bei denen ein starker Kontrast auftreten darf.



*Abbildung 3*: Phase des spezifischen elektrischen Widerstandes nach Inversion mit (oben) und ohne (unten) Nutzen des Algorithmus für die Kantenentkopplung. Grenzen des Störkörpers eingezeichnet.

Betrachten wir einen Ausschnitt eines Inversionsgitters (Abb. 4), so liefert die Zelle "m" mit Parameterwert p(m) vier Beiträge zur Gesamtrauhigkeit, die sich bei der Occam-Glättung zusammensetzen als:

$$Zellenbeitag(m) = \left(\frac{p(m) - p(o)}{dz} \cdot dx + \frac{p(m) - p(u)}{dz} \cdot dx + \frac{p(m) - p(l)}{dx} \cdot dz + \frac{p(m) - p(r)}{dx} \cdot dz\right) \cdot p(m)$$

Für eine Kante treten also immer zwei Beiträge auf. Beispiel ,o-m':

$$Kantenbeitrag(o-m) = \left(\frac{p(m) - p(o)}{dz} \cdot dx\right) \cdot p(m) + \left(\frac{p(o) - p(m)}{dz} \cdot dx\right) \cdot p(o) = \left(p(m) - p(o)\right)^2 \frac{dx}{dz} = c \cdot \Delta p^2$$

	p (o)	dz dx
p(l)	p (m)	p (r)
	p (u)	

Abbildung 4: Ausschnitt eines Inversionsgitters. p(i) sind die Werte der Modellparameter, dx und dz die Gitterabstände. Man kann nun die Beiträge bei Occam-Glättung in der Form  $c\Delta p^2$  darstellen, mit einer Konstanten c aus der Zellgeometrie und  $\Delta p$  als Parameterdifferenz zwischen zwei benachbarten Zellen. Bei Portniaguine und Zhdanov wird dieser Ausdruck zu  $c\Delta p^2/(c\Delta p^2+\beta^2)$  mit einer kleinen Konstante  $\beta$ . Somit wird die ,Bestrafung' auf Werte zwischen 0 und 1 begrenzt. Es ist aber noch immer so, dass größere Sprünge in den Modellparametern stärker bestraft werden. Der ursprüngliche Ansatz des An- und Abschaltens der Glättung bei bekannten Diskontinuitäten entspricht aber für große Kontraste genau dem Gegenteil: Die Kante wird entkoppelt und liefert keinen Beitrag zur Gesamtrauhigkeit. Bei Kontrast unter dem Grenzwert wächst der Beitrag mit größeren Parameterdifferenzen, analog zur Occam-Glättung.

Um nun auch zusätzlich sehr große Parametersprünge erhalten zu können, wird als Funktion der Wert nach Portniaguine und Zhdanov von 1 subtrahiert und darauf die Occam-Glättung angewandt.

 $\Delta p$  wird hierbei durch  $c\Delta p$  ersetzt. Vollständig also:  $\Delta p^2(1-(c\Delta p)^2/((c\Delta p)^2 + \beta^2))$ . Ein komplett glattes Modell ist damit noch immer ein Minimum in der Nebenbedingung. Ein starker Kontrast an einer Kante bewirkt aber keinen (signifikant) größeren Beitrag zur Nebenbedingung. Abbildung 5 soll hier die Arbeitsweise etwas veranschaulichen: Während bei der Occam-Glättung eine hohe Parameterdifferenz zwischen zwei benachbarten Zellen einen zum Quadrat proportionalen Beitrag zur Nebenbedingung liefert, sind die Beiträge nach Portniaguine und Zhdanov für starke Sprünge begrenzt und laufen asymptotisch gegen eine Konstante. In der aktuellen Variation wird dies noch verstärkt und ab einem gewissen Kontrast wird die Parameterdifferenz nicht mehr erniedrigt. Glatte Flächen und starke Sprünge werden also als stabile Werte in der Nebenbedingung bevorzugt, wobei noch immer ein vollständig glattes Modell ein Optimum darstellt.



Parameterdifferenz zwischen zwei benachbarten Zellen

*Abbildung 5:* Vergleich der Nebenbedingungen. Beitrag zur Nebenbedingung in Abhängigkeit von der Parameterdifferenz zwischen zwei benachbarten Zellen.

,Im Test': Hier werden ab einem bestimmten Wert Kontraste noch verstärkt, soweit es die Datenanpassung zulässt. Noch nicht vollständig stabil, aber verbesserte Kontrasterkennung bei synthetischen Daten.

Ein zweiter Aspekt spielt eine nicht unwichtige Rolle: Analog zu den Ansätzen des sogenannten ,active constraint balancing' von Yi et al. (2003) sollte der Multiplikator für die Glättungsbedingung auch nach ihren Sensitivitäten von Zelle zu Zelle verschieden sein. Ein starker Kontrast in Bereichen geringer Sensitivität ist aussagekräftiger als in einem Gebiet hoher Sensitivität. Entsprechend muss eine Abhängigkeit in der Gewichtung erfolgen. An der Stelle der bereits geometrisch gewichteten Parameterdifferenz c $\Delta p$  tritt nun noch ein ortsabhängiger Faktor s für die Sensitivität hinzu und man setzt  $c \cdot \Delta p \rightarrow s \cdot c \cdot \Delta p$ . Die Form des Gesamtausdrucks ändert sich nicht. An Orten großer Sensitivität liefert s kleine Werte und umgekehrt.

Berücksichtigt man alle diese Aspekte und vergleicht die sich ergebenden Inversionsergebnisse mit denen aus dem herkömmlichen Algorithmus, so erkennt man eine deutliche Verbesserung. Zu vergleichen sind Abb. 6 mit Abb. 2 und 3. Sowohl die Grenzen werden klarer reproduziert als auch die Werte für Betrag und Phase. Erwähnt werden muss noch, dass nicht nur ohne Vorinformationen gearbeitet wird, sondern auch das Inversionsgitter nicht mit dem der Vorwärtsrechnung übereinstimmt und somit ein exaktes Reproduzieren des Modells nicht möglich ist. Diesen vielversprechenden Ansatz wollen wir nun noch für komplexere Modelle vergleichen.

Das nächste Modell besteht aus zwei Schichten (oben 200 $\Omega$ m, 10mrad und unten 500 $\Omega$ m, 15mrad). In der oberen Schicht liegt auf der linken Seite ein gut leitender Störkörper (10 $\Omega$ m, 25mrad) und von rechts läuft eine ebenfalls gut leitende Schicht (20 $\Omega$ m, 20mrad) ein. Das Verhalten bei der Auflösung von Betrag und Phase ist sehr ähnlich, deshalb ist in Abb. 7 nur der Betrag dargestellt. Grundsätzlich werden sowohl vom Basisalgorithmus als auch von der geänderten Version die Körper erkannt, die neuere Version liefert jedoch einen besseren Kontrast und eine klarere Eingrenzung. Dass der rechte Körper nach außen begrenzt interpretiert wird, liegt an der geringen Messpunktdichte zu den Seiten mit entsprechend niedriger Sensitivität. Ähnliches gilt für die untere Schicht. Sie wird auch deshalb schlecht aufgelöst, weil es grundsätzlich schwieriger ist, schlechte Leiter gegenüber guten zu erkennen.

Als letztes synthetisches Beispiel soll ein ausgesprochener Problemfall für die neue Nebenbedingung getestet werden. Da der Algorithmus sehr glatte Modelle oder sehr scharfe Kontraste bevorzugt, ist das letzte Modell nun ein konstanter Gradient in (logarithmischem) Betrag und Phase. Das Modell reicht von 1000 $\Omega$ m an der Oberfläche zu 10 $\Omega$ m an der Unterseite bei einem Wechsel von 0.5mrad zu 20mrad. Die Ergebnisse sind wieder qualitativ in Betrag und Phase vergleichbar und diesmal sollen nur die Phasen gezeigt werden. Abbildung 8 zeigt die Ergebnisse im Vergleich. Wie zu erwarten, ist hier nun das Modell mit der Occam-Glättung näher an den Modellvorgaben, auch wenn die Isolinien sich aufgrund mangelnden Auflösevermögens in der Tiefe an den Rändern nach unten krümmen. Der neue Algorithmus hält zwar die Schichtung besser horizontal und reproduziert auch die Extremwerte besser, aber unterhalb von etwa 7m wird der Gradient so gering, dass eine stark geglättete und fast homogene Schicht eingelagert wird. Im oberen Bereich ist mit mehreren kleineren Sprüngen das Bild differenzierter. Offensichtlich aber ist ein größerer Bereich mit konstantem Gradient ein Problem für die neue Regularisierung.



**Abbildung 6:** Betrag (oben) und Phase (unten) des spezifischen elektrischen Widerstandes nach Inversion mit der neuen Nebenbedingung ohne Nutzen von Vorinformationen. Grenzen des Störkörpers eingezeichnet.



**Abbildung** 7: Betrag des spezifischen elektrischen Widerstandes nach Inversion mit der neuen Nebenbedingung ohne Nutzen von Vorinformationen (oben) und mit dem herkömmlichen Programm. Grenzen der Schichten und Störkörpers eingezeichnet. Werte siehe Text.

### Test an Felddaten

Hier werden Daten invertiert, die auf einem Testgelände in Krauthausen bei Jülich aufgenommen wurden. Natürlich kann man bei einem Vergleich von Inversionsergebnissen bei realen Messdaten nicht klar sagen, welches besser oder schlechter ist, jedoch ist das Gelände in Krauthausen recht gut bekannt, sodass man einige objektive Kriterien zum Vergleich hat. So erwartet man eine horizontale Schichtung mit einer scharfen Grenze bei der Basis des obersten Aquifers. In Abbildung 9 ist eine analysierte Bohrung dargestellt, die diese Grenze in etwa 11m Tiefe sieht. Allerdings ist diese Bohrung nicht mehr im Bereich des Messprofils. Sie läge etwa bei Profilmeter 130, dazu leicht versetzt .

Betrachten wir nun Abbildung 10 mit den Inversionsdaten für die Phase. Der geänderte Algorithmus liefert ein geschichtetes Modell, was der erwarteten Lage wesentlich näher kommt als das Ergebnis des herkömmlichen Algorithmus, der ein recht inhomogenes Untergrundbild mit einer Art Linsenstruktur produziert. Die Tiefe der scharfen Grenze liegt für den neuen Algorithmus allerdings bei nur etwa 6-8m. Da die Tiefe mit wachsenden Profilmetern leicht zunimmt, ist es aber vorstellbar, dass ein Wert von 11m bei Profilmeter 130 der Bohrung erreicht werden könnte. Das neue Ergebnis scheint also plausibler bei den bekannten Informationen aus einem Schichtaufbau in dem Gebiet und der Aquifertiefe aus der Bohrung. Analoges gilt neben der Phase auch für den Betrag. Der Kontrast wird schärfer und die Schichtung horizontaler.



**Abbildung 8:** Phase des spezifischen elektrischen Widerstandes nach Inversion mit der neuen Regularisierung ohne Nutzen von Vorinformationen (oben) und mit dem herkömmlichen Programm. Modell mit konstantem Gradient. Werte siehe Text.

#### Zusammenfassung und Ausblick

Es bleibt festzuhalten, dass in jedem Fall Vorinformationen über z.B. Lage von Schichtgrenzen bzw. Störkörperrändern genutzt werden sollten. Weiterhin kann eine geänderte Regulariserung Inversionsergebnisse bei gleicher Anpassung der Daten stark beeinflussen und es sollte überlegt werden, ob eine Bedingung, die auch neben einer Glättung vereinzelt Sprünge in den Parametern zulässt, nicht Vorteile gegenüber einer reinen Glättung hat, die keine scharfen Schichtgrenzen zulässt, obwohl diese bekanntermaßen auftreten können. Bei stark verschmierten Kontrasten bleibt die reine Glättung im Vorteil.

In Zukunft soll noch die EM-Kopplung weitgehend aus den Daten entfernt werden, um dann auch mehrere Frequenzen gleichzeitig invertieren zu können. Abschließend müssen noch die empirischen Beziehungen zur Berechnung der hydraulischen aus der komplexen elektrischen Leitfähigkeit betrachtet und eingebunden werden.



Abbildung 9: Analyseergebnis einer Bohrung in Nähe des Messprofils, aus Englert (2003). Basis des obersten Aquifers in etwa 11m Tiefe.



Abbildung 10: Phase des spezifischen elektrischen Widerstandes nach Inversion mit der neuen Regularisierung ohne Nutzen von Vorinformationen (oben) und mit dem herkömmlichen Programm.

### Literatur

Kemna, A., 2000, Tomographic inversion of complex resistivity: theory and application: Bochum, Univ., Diss.

Portniaguine, O. und Zhdanov, M. S., 1999, Focusing geophysical inversion image: Geophysics, 64, 874-887.

Yi, M.-J., Kim, J.-H. und Chung, S.-H., 2003, Enhancing the resolving power of least-squares inversion with active constraint balancing: Geophysics, 68, 931-941.

Englert, A., 2003, Measurement, Estimation and Modelling of Groundwater Flow Velocitiy at Krauthausen Test Site: Aachen, TH, Diss.

Knödel, K., Krummel, H. und Lange, G., 1997, Handbuch zur Erkundung des Untergrundes von Deponien und Altlasten, Band 3, Geophysik, Springer Verlag.

Ellis, R. G., Oldenburg, D. W., 1994, Applied geophysical inversion: Geophys. J. Int., 116, 5-11. DeGroot-Hedlin, C. und Constable, S. C., 1990, Occam's inversion to generate smooth, two-dimensional models from magnetotelluric data: Geophysics, 55, 1613-1624.