

Numerische Modellierung des elektromagnetischen Feldes einer Bohrlochantenne

P. Weidelt, Institut für Geophysik und Meteorologie, TU Braunschweig
F. König, Bundesanstalt für Geowissenschaften und Rohstoffe, Außenstelle Berlin

1. Einleitung

Für Aufgaben der Langzeitüberwachung, insbesondere im Braunkohlenbergbau, soll die in Fig. 1 als Modell dargestellte Bohrlochantenne entwickelt werden. Die Antenne ist stationär in einem Bohrloch untergebracht. In einer Reihe von weiteren Bohrlöchern in Entfernungen von 50 m bis 100 m wird das bohrlochparallele elektrische Feld gemessen. Sporadisch ausgesendet und registriert wird ein monochromatisches Signal mit einer Frequenz zwischen 1 kHz und 1 MHz. Diagnostisch verwertet werden zeitliche Änderungen der Übertragungsbedingungen. In beschränktem Umfang sind auch Tomographie-Anwendungen geplant.

Für die Anwendungen interessiert die Abstrahlcharakteristik der Bohrlochantenne und die Größe des zu erwartenden elektrischen Feldes, das im folgenden durch eine Modellrechnung abgeschätzt werden soll. Abstrahlungsprobleme vom vorliegenden Typ werden von Gallejs (1969), Wait & Fuller (1973) und vor allem von King et al. (1969) und King et al. (1981) behandelt. Die vorliegende Darstellung geht jedoch zum Teil eigene Wege.

2. Theorie

2.1 Bestimmung der Fortpflanzungskonstanten γ

Es wird ein Zylinderkoordinatensystem (r, φ, z) mit z in Antennenrichtung, positiv nach unten, angenommen. Dann ist das Feld rotationssymmetrisch mit den Feldkomponenten

$$E_r, E_z \quad \text{und} \quad H_\varphi.$$

Physikalisch ist dies eine TM -Mode.

Die Stromverteilung im Antennenhohlrohr hängt vom Antennenaufbau und im besonderen auch von der Umgebungsleitfähigkeit ab. Bevor das Feld der Antenne im Außenraum berechnet werden kann, muß diese Stromverteilung bestimmt werden. Dazu wird die Antennenanordnung (einschließlich Isolierschicht und Bohrlochspülung) durch eine unendlichlange Übertragungsleitung approximiert. Dies setzt voraus, daß

- die Länge h sehr viel größer als ihr Radius a_3 ist,
- die Frequenz so niedrig ist, daß der Radius sehr viel kleiner als eine typische Wellenlänge ist und damit keine Eigenmoden senkrecht zur Antenne möglich sind.

Diese Bedingungen sind für die beabsichtigte Anwendung sehr gut erfüllt.

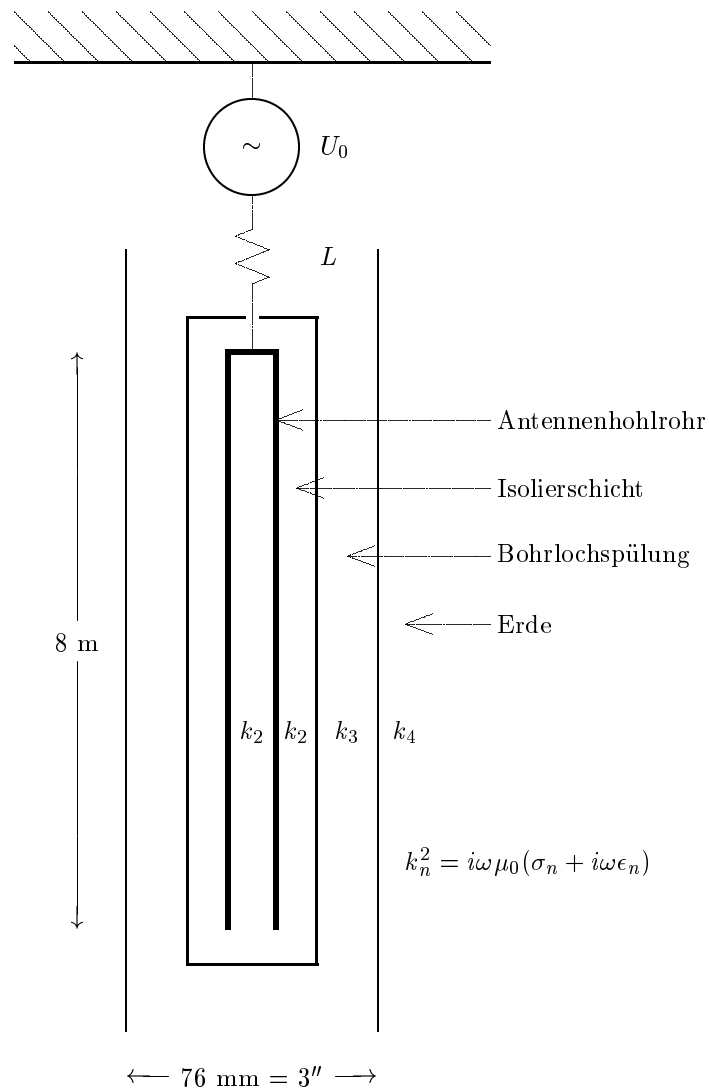
Grundgleichungen:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu_0\mathbf{H}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = (\sigma + i\omega\epsilon)\mathbf{E}$$

Mit $\mathbf{E} = (E_r, 0, E_z)$ und $\mathbf{H} = (0, H_\varphi, 0)$ ergibt sich für H_φ innerhalb der homogenen Schicht n die Dgl.

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi) \right) + \frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial z^2} = k_n^2 H_\varphi \quad (1)$$

Fig. 1: Modell der Bohrlochantenne



Physikalische Parameter

Antennenhohlrohr: Radius $a_1 = 4$ mm, Länge $h = 8$ m, Leitwert $\tau = 1000$ S

Isolierschicht: Außenradius $a_2 = 5$ mm, $\sigma_2 = 10^{-10}$ S/m, $\epsilon_2 = 5 \epsilon_0$

Bohrlochspülung: Außenradius $a_3 = 38$ mm, $\sigma_3 = 10^{-1}$ S/m, $\epsilon_3 = 81 \epsilon_0$

Erde: $\sigma_4 = (0.001 \dots 1)$ S/m, $\epsilon_4 = (1 \dots 10) \epsilon_0$

Induktivität: $L = 30$ mH

Frequenz: $f = 1$ kHz ... 1 MHz

mit

$$k_n^2 := i\omega\mu_0(\sigma_n + i\omega\epsilon_n)$$

Ferner gilt

$$E_r = -\frac{1}{\sigma_n + i\omega\epsilon_n} \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} \quad \text{und} \quad E_z = +\frac{1}{\sigma_n + i\omega\epsilon_n} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi) \quad (2)$$

Die allgemeine partikuläre Lösung von (1) ist

$$H_\varphi = \{A_n I_1(\lambda_n r) + B_n K_1(\lambda_n r)\} \exp(\gamma z)$$

mit

$$\lambda_n^2 := k_n^2 - \gamma^2.$$

Dazu gehört

$$E_z = \frac{\lambda_n}{\sigma_n + i\omega\epsilon_n} \{A_n I_0(\lambda_n r) - B_n K_0(\lambda_n r)\} \exp(\gamma z)$$

$I_m(\cdot)$ und $K_m(\cdot)$ sind die modifizierten Besselfunktionen der Ordnung m . Als Eigenwertproblem zu bestimmen ist die komplexe Fortpflanzungskonstante γ entlang der Übertragungsleitung.

In den vier Bereichen unseres Modells machen wir für H_φ die Ansätze

$$H_\varphi(r, z) = \begin{cases} A_1 I_1(\lambda_2 r) \exp(\gamma z), & 0 \leq r < a_1 \\ \{A_2 I_1(\lambda_2 r) + B_2 K_1(\lambda_2 r)\} \exp(\gamma z), & a_1 < r < a_2 \\ \{A_3 I_1(\lambda_3 r) + B_3 K_1(\lambda_3 r)\} \exp(\gamma z), & a_2 < r < a_3 \\ B_4 K_1(\lambda_4 r) \exp(\gamma z), & r > a_3 \end{cases}$$

An den Grenzflächen $r = a_2$ und $r = a_3$ sind H_φ und E_z stetig. An der Grenzfläche $r = a_1$ ist neben der Stetigkeit von E_z die Bedingung

$$H_\varphi(a_1^+) - H_\varphi(a_1^-) = \tau E_z \quad (3)$$

zu erfüllen. Dabei ist τ der Leitwert des Antennenhohlrohrs. Diese Gleichung liefert den Sprung der magnetischen Tangentialkomponente, der durch den Flächenstrom $j_z = \tau E_z$ in der Wand des Antennenhohlrohrs erzeugt wird. Insgesamt ergeben sich damit 6 homogene lineare Gleichungen zur Bestimmung der 6 Unbekannten A_1 bis B_4 . Eine Lösung existiert nur, wenn die Determinante des resultierenden Gleichungssystems verschwindet. Dies liefert als Bestimmungsgleichung für die komplexe Fortpflanzungskonstante γ :

$$\begin{vmatrix} I_1(x_{21}) + i\omega\mu_0\tau y_2 I_0(x_{21}) & -I_1(x_{21}) & -K_1(x_{21}) & 0 & 0 & 0 \\ I_0(x_{21}) & -I_0(x_{21}) & K_0(x_{21}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_1(x_{22}) & K_1(x_{22}) & -I_1(x_{32}) & -K_1(x_{32}) & 0 \\ 0 & y_2 I_0(x_{22}) & -y_2 K_0(x_{22}) & -y_3 I_0(x_{32}) & y_3 K_0(x_{32}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_1(x_{33}) & K_1(x_{43}) & -K_1(x_{43}) \\ 0 & 0 & 0 & y_3 I_0(x_{33}) & -y_3 K_0(x_{33}) & y_4 K_0(x_{43}) \end{vmatrix} = 0$$

mit

$$x_{nm} := \lambda_n a_m = \sqrt{k_n^2 - \gamma^2} a_m, \quad y_n := \lambda_n / k_n^2 = \sqrt{k_n^2 - \gamma^2} / k_n^2.$$

Diese nichtlineare Gleichung lösen wir iterativ. Ausgangspunkt dazu ist die Lösung der Bestimmungsgleichung für das vereinfachte Modell mit fehlender Bohrlochspülung ($a_3 = a_2$)

$$\begin{vmatrix} I_1(x_{21}) + i\omega\mu_0\tau y_2 I_0(x_{21}) & -I_1(x_{21}) & -K_1(x_{21}) & 0 \\ I_0(x_{21}) & -I_0(x_{21}) & K_0(x_{21}) & 0 \\ 0 & I_1(x_{22}) & K_1(x_{22}) & -K_1(x_{42}) \\ 0 & y_2 I_0(x_{22}) & -y_2 K_0(x_{22}) & y_4 K_0(x_{42}) \end{vmatrix} = 0$$

Wegen $|x_{21}| \ll 1$ und $|x_{22}| \ll 1$ ist $I_0(z) \simeq 1$, $I_1(z) \simeq z/2$, $K_0(z) \simeq -\log(0.89z)$ und $K_1 \simeq 1/z$, so daß sich die Bestimmungsgleichung weiter vereinfacht zu

$$\begin{vmatrix} i\omega\mu_0\tau y_2 & 0 & -1/x_{21} & 0 \\ 1 & -1 & \log(x_{21}) & 0 \\ 0 & 0 & 1/x_{22} & -K_1(x_{42}) \\ 0 & y_2 & y_2 \log(x_{22}) & y_4 K_0(x_{42}) \end{vmatrix} = 0$$

| log f [Hz] | $\sigma_4 = 0.001$ S/m | | $\sigma_4 = 0.01$ S/m | | $\sigma_4 = 0.1$ S/m | | $\sigma_4 = 1$ S/m | |
|--------------|------------------------|---------------|-----------------------|---------------|----------------------|---------------|--------------------|---------------|
| | α [1/m] | β [1/m] | α [1/m] | β [1/m] | α [1/m] | β [1/m] | α [1/m] | β [1/m] |
| 3.0 | 3.38e-4 | 4.73e-4 | 3.42e-4 | 4.67e-4 | 3.47e-4 | 4.60e-4 | 3.53e-4 | 4.52e-4 |
| | 3.46e-4 | 4.62e-4 | 3.52e-4 | 4.54e-4 | 3.58e-4 | 4.46e-4 | 3.64e-4 | 4.38e-4 |
| 3.5 | 4.85e-4 | 1.13e-3 | 4.87e-4 | 1.09e-3 | 5.06e-4 | 1.05e-3 | 5.28e-4 | 1.01e-3 |
| | 5.01e-4 | 1.06e-3 | 5.22e-4 | 1.02e-3 | 5.46e-4 | 9.74e-4 | 5.72e-4 | 9.29e-4 |
| 4.0 | 7.46e-4 | 3.19e-3 | 6.45e-4 | 3.07e-3 | 6.73e-4 | 2.90e-3 | 7.19e-4 | 2.70e-3 |
| | 6.62e-4 | 2.94e-3 | 7.07e-4 | 2.75e-3 | 7.62e-4 | 2.55e-3 | 8.30e-4 | 2.34e-3 |
| 4.5 | 2.11e-3 | 9.33e-3 | 1.06e-3 | 9.24e-3 | 1.03e-3 | 8.64e-3 | 1.10e-3 | 7.97e-3 |
| | 1.00e-3 | 8.80e-3 | 1.08e-3 | 8.14e-3 | 1.18e-3 | 7.42e-3 | 1.32e-3 | 6.64e-3 |
| 5.0 | 9.42e-3 | 2.39e-2 | 2.87e-3 | 2.80e-2 | 2.17e-3 | 2.61e-2 | 2.29e-3 | 2.39e-2 |
| | 2.09e-3 | 2.67e-2 | 2.22e-3 | 2.45e-2 | 2.46e-3 | 2.21e-2 | 2.78e-3 | 1.94e-2 |
| 5.5 | 2.80e-2 | 4.70e-2 | 1.28e-2 | 8.30e-2 | 6.37e-3 | 7.79e-2 | 6.27e-3 | 7.17e-2 |
| | 5.92e-3 | 8.08e-2 | 5.98e-3 | 7.35e-2 | 6.64e-3 | 5.54e-2 | 7.56e-3 | 5.63e-2 |
| 6.0 | 4.92e-2 | 9.46e-2 | 6.72e-2 | 2.25e-1 | 2.41e-2 | 2.36e-1 | 2.08e-2 | 2.14e-1 |
| | 2.17e-2 | 2.43e-1 | 1.89e-2 | 2.20e-1 | 2.07e-2 | 1.93e-1 | 2.35e-2 | 1.62e-1 |

Tabelle 1: Werte der Fortpflanzungskonstanten $\gamma = \alpha + i\beta$ als Funktion der Frequenz f und der Umgebungsleitfähigkeit σ_4 für das Modell der Bohrlochantenne von Fig. 1 (mit $\epsilon_4 = 10\epsilon_0$). Die unteren Werte sind die Näherungswerte nach Gl. (4).

mit der sehr brauchbaren Näherungslösung

$$\gamma^2 \simeq k_2^2 \left\{ 1 + \frac{1}{\log(a_2/a_1)} \left(\frac{1}{i\omega\mu_0\tau a_1} + \frac{1}{k_4 a_2} \frac{K_0(k_4 a_2)}{K_1(k_4 a_2)} \right) \right\}. \quad (4)$$

Im letzten Schritt wurde angenommen, daß $|\gamma| \ll |k_4|$ und somit $\lambda_4 \simeq k_4$. Tabelle 1 zeigt die aus der Anfangsnäherung gewonnenen wahren Werte von $\gamma = \alpha + i\beta$ als Funktion der Frequenz f und der Umgebungsleitfähigkeit σ_4 . Der untere Wert ist die Näherungslösung nach (4). Der Realteil α beschreibt die Dämpfung einer in $+z$ -Richtung laufenden Welle, die nach dem Laufweg $\Delta z = 1/\alpha$ um den Faktor $1/e$ gedämpft wird. Die zugehörige Wellenlänge beträgt $\lambda = 2\pi/\beta$. Mit $h = 8$ m ist $|\gamma h| \ll 1$ für $f < 300$ kHz, d.h. die Welle ist entlang der Antenne nur geringfügig gedämpft und die Wellenlänge ist wesentlich größer als das Antennenrohr, so daß entlang dem Antennenrohr die Phasenverschiebungen klein sind.

2.2 Bestimmung der Felder in der Antenne

Der Strom $I(z)$ im Antennenhohlrohr ist nach (3) mit der Feldkomponente $E_z(a_1, z)$ verknüpft durch

$$I(z) = 2\pi a_1 j_z(z) = 2\pi a_1 \{H_\varphi(a_1^+, z) - H_\varphi(a_1^-, z)\} = 2\pi a_1 \tau E_z(a_1, z). \quad (5)$$

Die Spannung $U(z)$ zwischen dem Antennenhohlrohr bei $r = a_1$ und dem äußeren Rand der Antenne bei $r = a_3$ beträgt

$$U(z) = \int_{a_1}^{a_3} E_r(r, z) dr. \quad (6)$$

Zwischen $I(z)$ und $U(z)$ gelten nach der vereinfachten Leitungstheorie [z.B. Küpfmüller (1959), p. 355] die **Leitungsgleichungen**

$$\frac{dU}{dz} = -\zeta I, \quad \frac{dI}{dz} = -\eta U \quad (7)$$

oder

$$\frac{d^2 U}{dz^2} = \gamma^2 U, \quad \frac{d^2 I}{dz^2} = \gamma^2 I, \quad \gamma^2 := \eta \zeta. \quad (8)$$

Der Widerstandsbelag ζ [Ω/m] ist der Widerstand pro Längeneinheit in Leitungsrichtung und η [S/m] ist der Leitwert pro Längeneinheit für den Stromfluß in radialer Richtung. Für die koaxiale Antenne gilt

$$\frac{1}{\eta} = \frac{1}{2\pi(\sigma_2 + i\omega\epsilon_2)} \log \frac{a_2}{a_1} + \frac{1}{2\pi(\sigma_3 + i\omega\epsilon_3)} \log \frac{a_3}{a_2}. \quad (9)$$

Wir wollen diese Leitungsgleichungen kurz begründen: Da $|k_2 a_2| \ll 1$ und $|k_3 a_3| \ll 1$, zeigt $H_\varphi(r, z)$ in $a_1 < r < a_3$ im wesentlichen nur eine geometrische Abschwächung $\sim 1/r$, d.h. die Lösung von (1) kann hier approximiert werden durch

$$H_\varphi(r, z) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r < a_1 \\ H_\varphi(a_1^+, z)(a_1/r), & a_1 < r < a_3 \end{cases} \quad (10)$$

Damit folgt aus (6), (2), (10), (9) und (5)

$$\begin{aligned} U(z) &= \int_{a_1}^{a_3} E_r(r, z) dr = - \int_{a_1}^{a_3} \frac{1}{\sigma(r) + i\omega\epsilon(r)} \frac{\partial H_\varphi(r, z)}{\partial z} dr \\ &= - \frac{\partial H_\varphi(a_1^+, z)}{\partial z} \int_{a_1}^{a_3} \frac{a_1}{\sigma(r) + i\omega\epsilon(r)} \frac{dr}{r} \\ &= - \frac{\partial H_\varphi(a_1^+, z)}{\partial z} \left\{ \frac{a_1}{\sigma_2 + i\omega\epsilon_2} \log \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_1}{\sigma_3 + i\omega\epsilon_3} \log \frac{a_3}{a_2} \right\} \\ &= - \frac{2\pi a_1}{\eta} \frac{\partial H_\varphi(a_1^+, z)}{\partial z} = - \frac{1}{\eta} \frac{dI(z)}{dz}. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde ausgenutzt, daß wegen der Approximation (10) gilt $H_\varphi(a_1^-, z) = 0$. Damit ist die zweite Leitungsgleichung in (7) begründet. - Der Beweis der ersten Leitungsgleichung verläuft entsprechend; zu nutzen ist dabei die Beziehung $\partial^2 H_\varphi / \partial z^2 = \gamma^2 H_\varphi$.

Der Einspeisepunkt der Antenne liege bei $z = 0$, das Ende der Antenne bei $z = h$. Mit der Eingangsspannung $U_e := U(0)$ und der Randbedingung $I(h) = 0$ erhält man als Lösung von (7) und (8)

$$I(z) = \frac{U_e}{Z_c} \frac{\sinh \gamma(h-z)}{\cosh \gamma h}, \quad U(z) = U_e \frac{\cosh \gamma(h-z)}{\cosh \gamma h}, \quad Z_c := \gamma/\eta$$

Dabei wird Z_c als charakteristische Impedanz bezeichnet. Sie hängt mit der Eingangsimpedanz $Z_e = U_e/I_e$ mit $I_e := I(0)$ zusammen durch $Z_e = Z_c \coth \gamma h$. Zwischen dem Eingangspunkt der Antenne und dem Generator (Spannung U_0) kann zur Verschiebung der Resonanzfrequenz noch eine Induktivität L in Serie geschaltet werden. Es gilt $U_0 = I_e(Z_e + i\omega L)$ und deshalb

$$I_e = \frac{U_0}{Z_c \coth \gamma h + i\omega L}$$

so daß

$$I(z) = \frac{U_0 \sinh \gamma(h-z)}{Z_c \cosh \gamma h + i\omega L \sinh \gamma h}, \quad U(z) = \frac{U_0 Z_c \cosh \gamma(h-z)}{Z_c \cosh \gamma h + i\omega L \sinh \gamma h}.$$

Nach Vorgabe von U_0 kann jetzt $I(z)$ und damit nach (5) die Feldkomponente $E_z(a_1, z)$ bestimmt werden. Dadurch ist das Feld in der ganzen Antenne berechenbar.

| $\log f [\text{Hz}]$ | $\sigma_4 = 0.001 \text{ S/m}$ | | $\sigma_4 = 0.01 \text{ S/m}$ | | $\sigma_4 = 0.1 \text{ S/m}$ | | $\sigma_4 = 1 \text{ S/m}$ | |
|----------------------|--------------------------------|------------------|-------------------------------|------------------|------------------------------|------------------|----------------------------|------------------|
| | $\Re Z[\Omega]$ | $-\Im Z[\Omega]$ | $\Re Z[\Omega]$ | $-\Im Z[\Omega]$ | $\Re Z[\Omega]$ | $-\Im Z[\Omega]$ | $\Re Z[\Omega]$ | $-\Im Z[\Omega]$ |
| 3.0 | 60.5 | 44.3 | 59.7 | 43.6 | 58.7 | 44.3 | 57.7 | 45.1 |
| | 6.25 | 16000 | 6.25 | 16000 | 6.25 | 1600 | 6.25 | 16000 |
| 3.5 | 45.5 | 19.6 | 44.2 | 19.7 | 42.4 | 20.4 | 40.7 | 21.3 |
| | 1.09 | 5050 | 1.09 | 5050 | 1.09 | 5050 | 1.09 | 5050 |
| 4.0 | 40.8 | 9.51 | 39.2 | 8.22 | 37.0 | 8.58 | 34.5 | 9.17 |
| | 0.623 | 1600 | 0.596 | 1600 | 0.593 | 1600 | 0.593 | 1600 |
| 4.5 | 37.7 | 8.50 | 37.3 | 4.24 | 34.9 | 4.13 | 32.2 | 4.43 |
| | 0.833 | 504 | 0.619 | 504 | 0.600 | 504 | 0.598 | 504 |
| 5.0 | 30.5 | 12.0 | 35.7 | 3.57 | 33.4 | 2.69 | 30.5 | 2.84 |
| | 1.94 | 158 | 0.947 | 157 | 0.787 | 157 | 0.773 | 158 |
| 5.5 | 19.1 | 11.1 | 33.6 | 4.90 | 31.9 | 2.32 | 29.0 | 2.30 |
| | 3.26 | 48.9 | 2.77 | 43.0 | 1.49 | 43.6 | 1.37 | 44.9 |
| 6.0 | 12.2 | 5.99 | 29.0 | 7.87 | 30.3 | 2.32 | 27.4 | 1.97 |
| | 3.70 | 13.7 | 16.2 | -1.11 | 7.13 | -9.18 | 4.86 | -3.37 |

Tabelle 2: Werte der charakteristischen Impedanz Z_c (oben) und der Eingangsimpedanz Z_e (unten) als Funktion der Frequenz f und der Umgebungsleitfähigkeit σ_4 für das Modell der Bohrlochantenne von Fig. 1 (mit $\epsilon_4 = 10\epsilon_0$).

Tabelle 2 gibt die komplexen Impedanzen Z_c und Z_e für die ausgewählten Frequenzen und Umgebungsleitfähigkeiten von Tabelle 1. Der Imaginärteil der Impedanzen ist fast immer negativ. Die von der Antennenlänge unabhängige charakteristische Impedanz zeigt eine relativ geringe Variabilität. Dagegen zeigt die von h abhängige Eingangsimpedanz Z_e ein ausgeprägtes Frequenzverhalten, ist aber für niedrige Frequenzen unabhängig von der Umgebungsleitfähigkeit σ_4 . Tatsächlich gilt mit den Parametern von Fig. 1 in sehr guter Näherung

$$Z_e = Z_c \coth \gamma h = (\gamma/\eta) \coth \gamma h \simeq 1/(\eta h) \simeq \frac{\log(a_2/a_1)}{2\pi i \omega \epsilon_2 h}.$$

Deshalb ist der Eingangswiderstand - wie auch aus Tabelle 2 ersichtlich - fast rein kapazitiv und wird aus dem Koaxial-Kondensator der Länge h der Isolierschicht $a_1 < r < a_2$ gebildet. Mit der in Serie geschalteten Induktivität liefert er eine Resonanz, wenn

$$\frac{\log(a_2/a_1)}{2\pi i \omega \epsilon_2 h} + i\omega L \simeq 0, \quad \text{d.h. wenn} \quad \omega^2 \simeq \frac{\log(a_2/a_1)}{2\pi \epsilon_2 h L}.$$

Für die Modellparameter $a_2/a_1 = 5/4$, $\epsilon_2 = 5\epsilon_0$, $L = 30 \text{ mH}$ und $h = 8 \text{ m}$ liegt die Resonanzfrequenz bei 9.2 kHz.

2.3 Abgestrahlte Leistung

Die Feldkomponenten $E_z(a_3, z)$ und $H_\varphi(a_3, z)$ können nach der Methode des vorangegangenen Abschnitts berechnet werden. Damit ist nach dem Poynting-Theorem auch die abgestrahlte Leistung P ermittelbar,

$$P = -\frac{1}{2} \Re \int_0^h E_z(a_3, z) H_\varphi^*(a_3, z) dz \cdot 2\pi a_3. \quad (11)$$

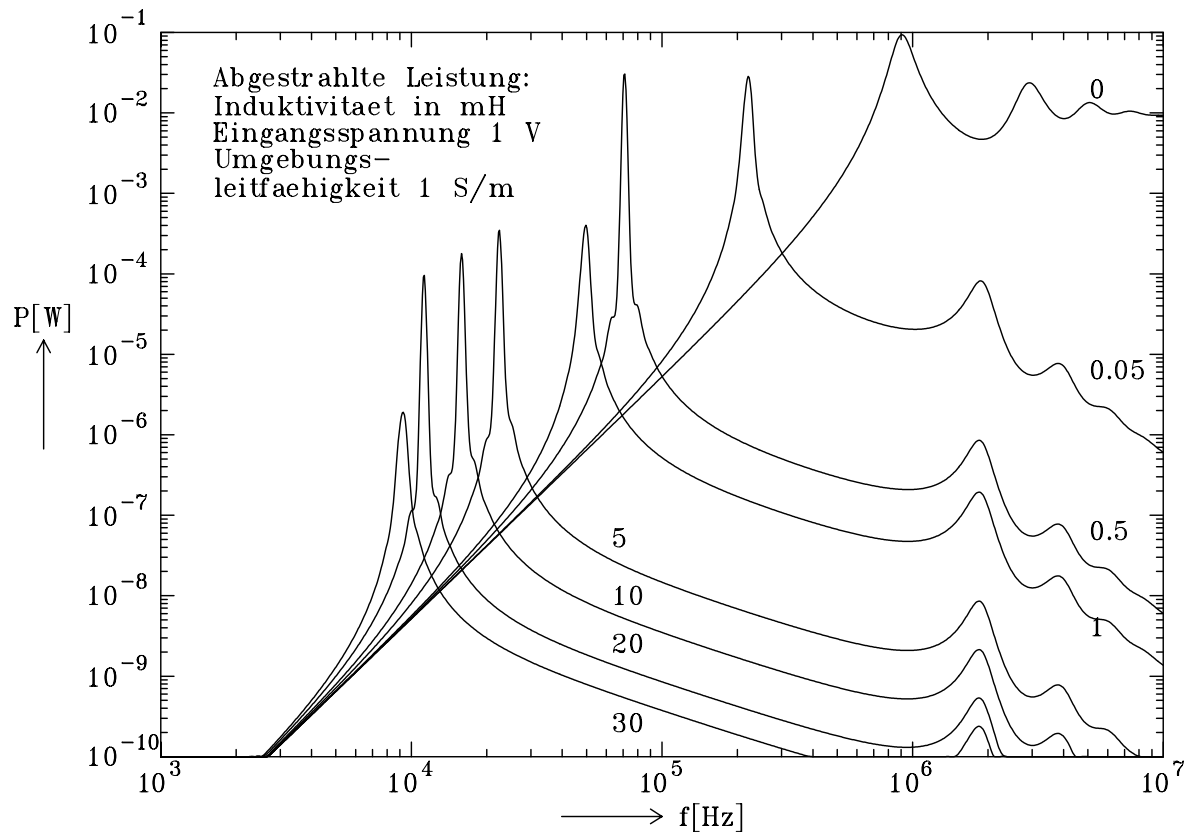
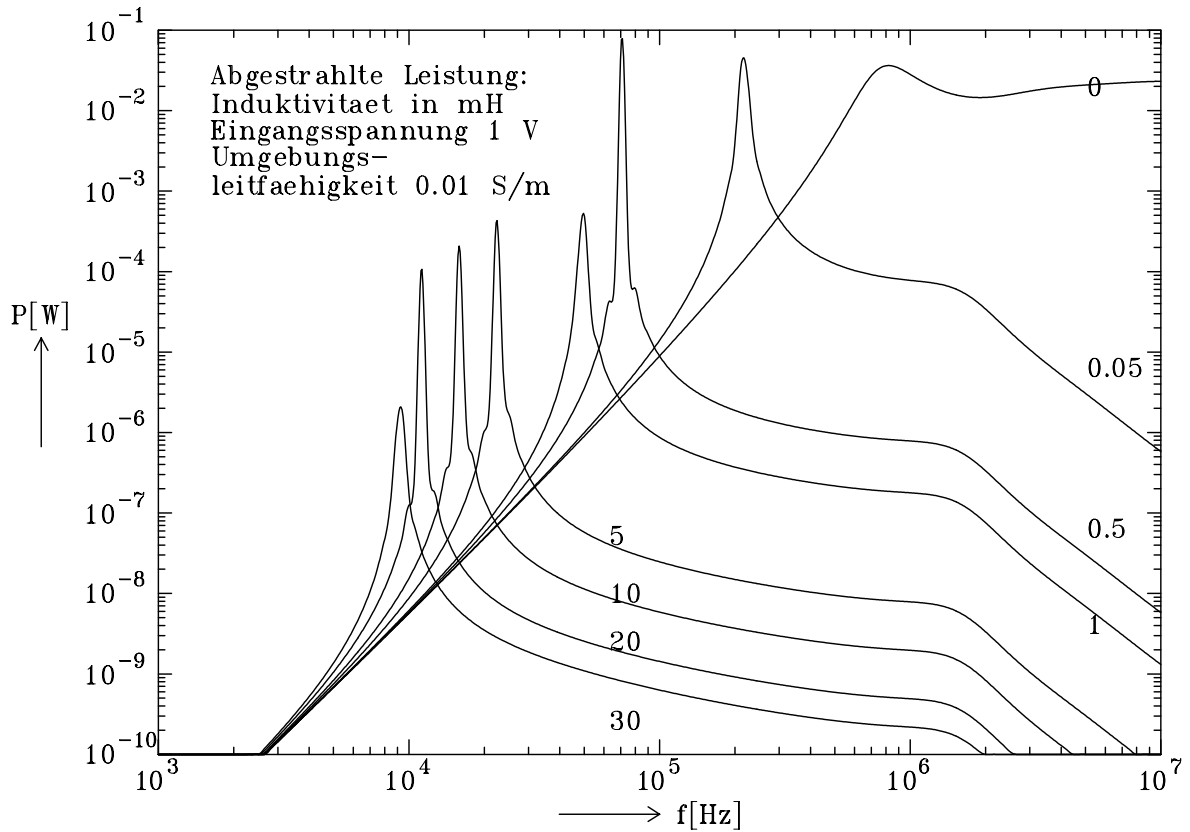


Fig. 2: Abstrahlte Leistung als Funktion der Frequenz für $U_0 = 1$ V und verschiedene Werte von L (Kurvenparameter in mH). Gezeigt wird die abgestrahlte Leistung für $\sigma_4 = 0.01$ S/m (oben) und $\sigma_4 = 1$ S/m unten. Unterschiede treten nur bei sehr hohen Frequenzen auf.

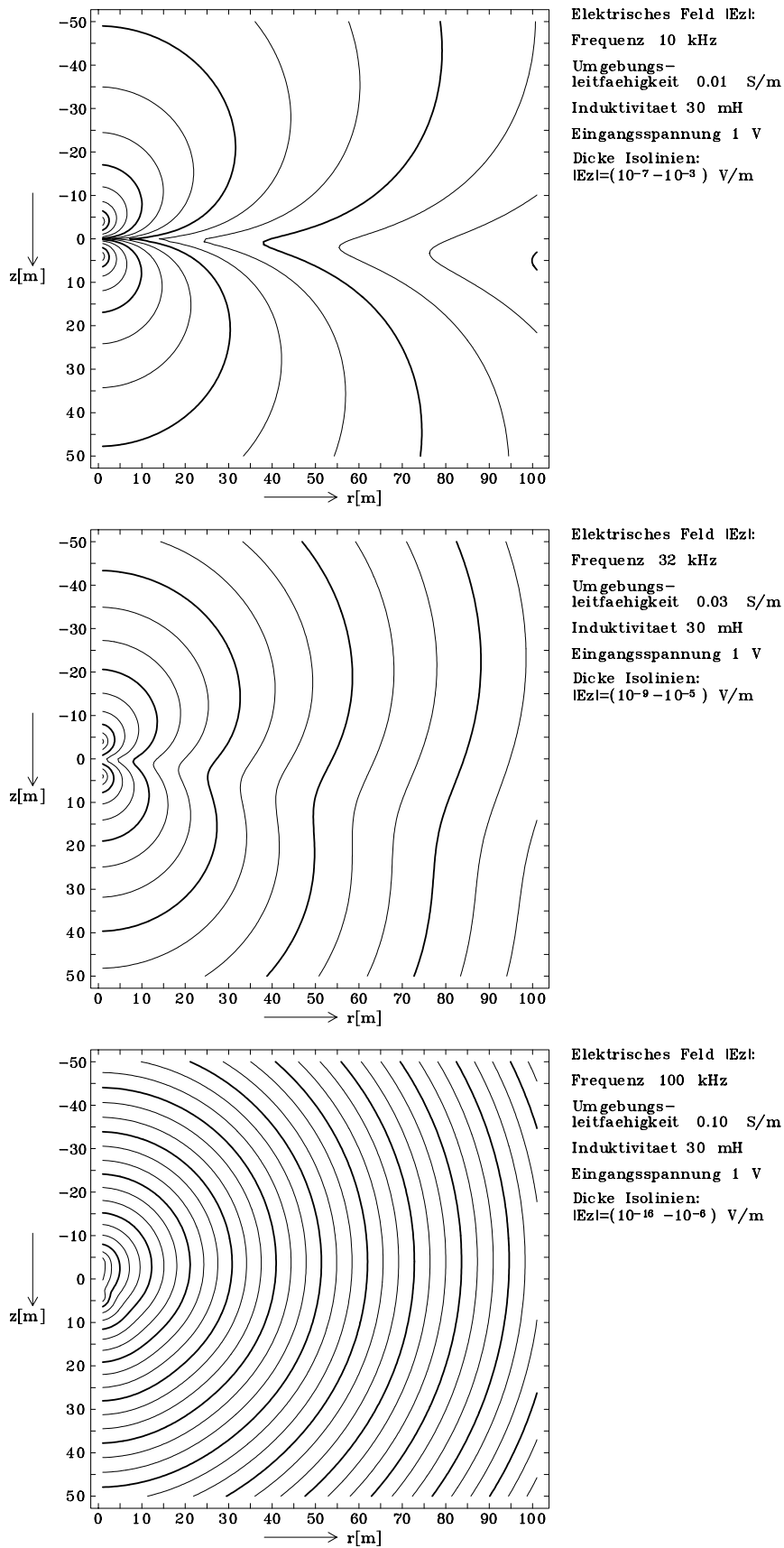


Fig. 3: Isolinien von $|E_z|$ für unterschiedlich starke Induktion im Außenraum: Von oben nach unten wächst das Produkt $\sigma_4 f$ jeweils um den Faktor 10.

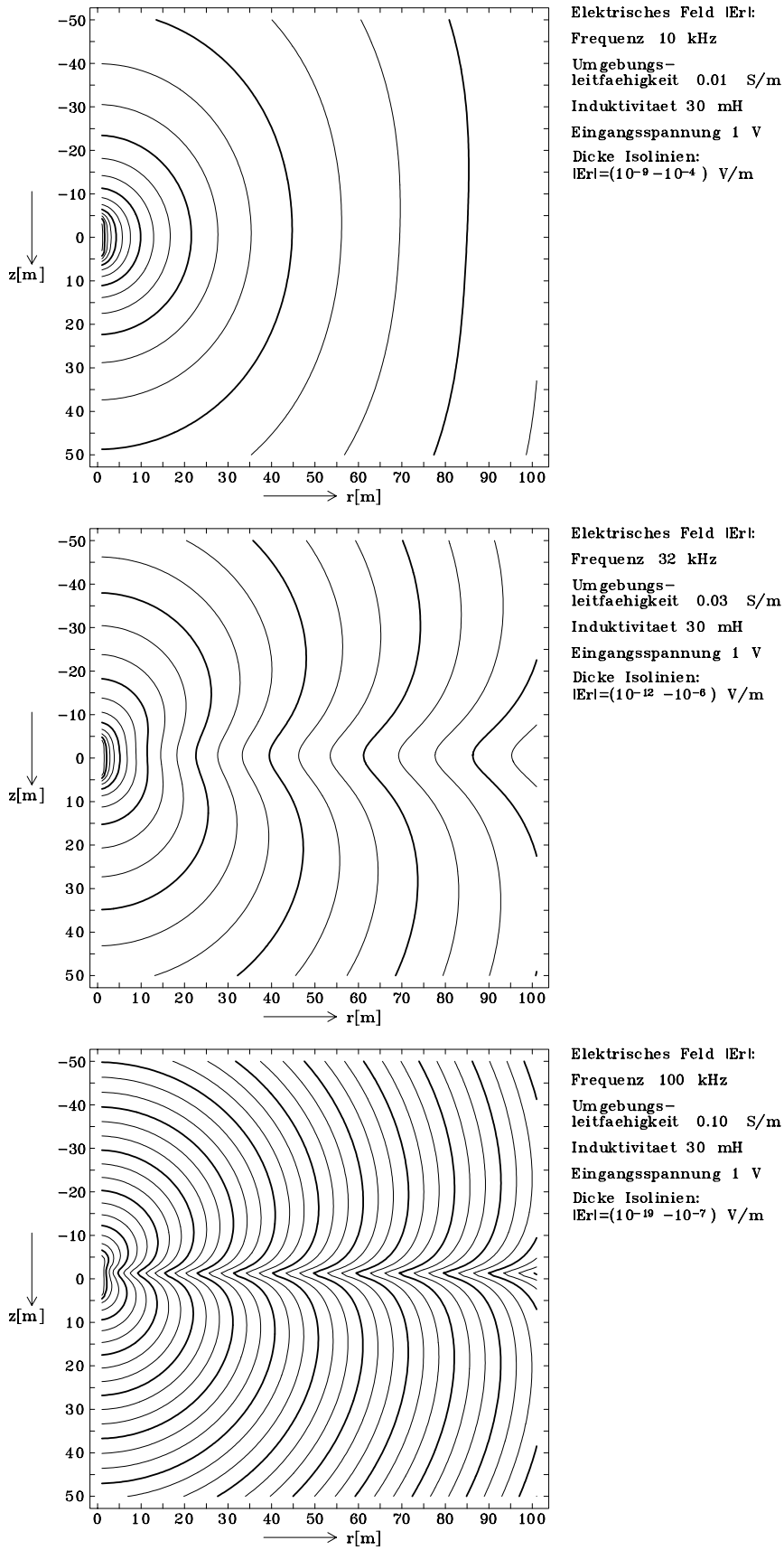


Fig. 4: Isolinien von $|E_r|$ für unterschiedlich starke Induktion im Außenraum: Von oben nach unten wächst das Produkt $\sigma_4 f$ jeweils um den Faktor 10.

Fig. 2 zeigt die abgestrahlte Leistung für zwei verschiedene Umgebungsleitfähigkeiten σ_4 als Funktion der Frequenz für verschiedene Induktivitäten L . Es wird $U_0 = 1$ V angenommen. Bei anderen Generatorspannungen skaliert sich die Strahlungsleistung mit U_0^2 . Die resonanten Erscheinungen für $\sigma_4 = 1$ S/m bei hohen Frequenzen hängen mit der in diesem Parameterbereich auftretenden niedrigen Eingangsimpedanz zusammen (s. Tabelle 2). Die physikalische Deutung ist noch unklar.

2.4 Das Feld im Außenraum der Antenne

Sind auf der Antennenoberfläche E_r , E_z und H_φ bekannt, so kann das elektromagnetische Feld in einem quellenfreien homogenen Außenraum mit der Wellenzahl k_4 sehr einfach mit der Stratton-Chu-Formel (z.B. Jackson, 1975, p. 433, Zhdanov, 1988) berechnet werden. Ist S die Berandung der Antenne, $\hat{\mathbf{n}}$ der von der Antenne fortweisende Normaleneinheitsvektor und \mathbf{r}_0 ein Punkt im Außenraum der Antenne, so gilt

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = \oint_S \{(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E})\nabla\Psi + (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}) \times \nabla\Psi - i\omega\mu_0(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H})\Psi\} d^2\mathbf{r}$$

mit

$$\Psi(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = \frac{\exp(-k_4|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$$

Dabei ist $d^2\mathbf{r}$ das ungerichtete Flächenelement. Explizit sind die elektrischen Feldkomponenten im Außenraum also gegeben durch

$$\begin{aligned} E_z(\mathbf{r}_0) &= \oint_S (E_r \partial_z \Psi + E_z \partial_r \Psi - i\omega\mu_0 H_\varphi \Psi) d^2\mathbf{r} \\ E_r(\mathbf{r}_0) &= \oint_S (E_r \partial_r \Psi - E_z \partial_z \Psi) d^2\mathbf{r} \end{aligned}$$

Fig. 3 und Fig. 4 zeigen Isolinien von $|E_z|$ und $|E_r|$ für unterschiedliche Induktionsparameter des Außenraumes. Wegen der asymmetrischen Einspeisung ist das Feld nicht symmetrisch zum Antennenmittelpunkt $z = 0, r = 0$. Die Abstrahlung der Antenne unterscheidet sich bei niedrigen Frequenzen dadurch stark von der Dipolabstrahlung, daß $|E_z|$ in der Äquatorebene am schwächsten ist, während die Dipolabstrahlung in der Äquatorebene das größte $|E_z|$ liefert.

3. Literaturverzeichnis

- Galejs, J., 1969. *Antennas in inhomogeneous media*, Pergamon Press, Oxford [etc].
- Jackson, J.D., 1975. *Classical electrodynamics*, 2nd Ed., John Wiley & Sons, New York [etc].
- King, R.W.P. & Harrison, Ch. W, 1969. *Antennas and waves: a modern approach*, The MIT Press, Cambridge, Mass. and London.
- King, R.W.P., Owens, M. & Wu, T.T., 1981. *Antennas in matter: fundamentals, theory and applications*, The MIT Press, Cambridge, Mass. and London.
- Küpfmüller, K., 1959. *Einführung in die theoretische Elektrotechnik*, 6. Aufl., Springer-Verlag, Berlin [etc].
- Wait, J.R. & Fuller, J.A., 1973. Transmission line theory for an insulated linear antenna in a fluid- or air-filled borehole, *Appl. Phys*, **1**, 311-316.
- Zhdanov, M.S., 1988. *Integral transforms in geophysics*, Springer-Verlag, Berlin [etc].