

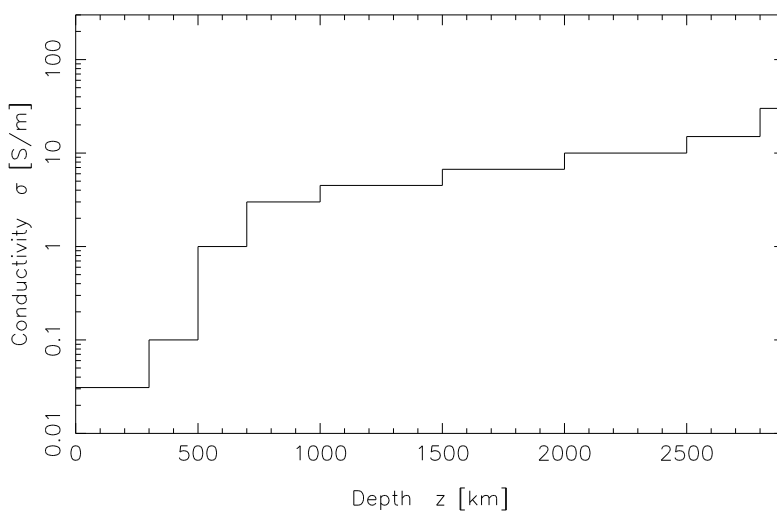
# Diffusion der Säkularvariation durch den Erdmantel: Diffusionszeiten für radiale und tangentielle Magnetfelder

Jens Stadelmann

Institut für Geophysik und Meteorologie  
Technische Universität Braunschweig

Der Erdmantel verzögert und glättet zeitliche Magnetfeldänderungen auf ihrem Weg von der Kern-Mantel-Grenze an die Erdoberfläche. Bei der Behandlung der Diffusion der Magnetfeldänderungen wird in der Regel nur die radiale Komponente des poloidalen Magnetfeldes betrachtet. Aber auch die tangentielle Komponente verdient Beachtung, da sie auf andere Weise von der Leitfähigkeitsverteilung im Mantel abhängt. Die Diffusionszeiten der tangentialen Komponente sind dabei stets größer als die der radialen Komponente. Bei der Fortsetzung der beobachteten Säkularvariation von der Erdoberfläche an die Kern-Mantel-Grenze durch den elektrisch leitenden Mantel erhält man entsprechend zwei Anteile, die sich unterschiedlich verhalten.

## Das Leitfähigkeitsmodell



**Abbildung 1:** Modell für die elektrische Leitfähigkeit des Erdmantels

Das Leitfähigkeitsmodell, das im folgenden verwendet wird, ist in Abbildung 1 dargestellt. Die Leitfähigkeit ist im Tiefenbereich zwischen je zwei Kugelschalen konstant, d. h. die elektrische Leitfähigkeit  $\sigma$  hängt nur von der Tiefe bzw. vom Radius  $r$  ab. Für den Außenraum wird  $\sigma = 0$  vorausgesetzt. Die Leitfähigkeit des Mantels steigt von etwa 0.03 S/m an der Erdoberfläche (die Kruste wird aufgrund ihrer geringen räumlichen Ausdehnung hier einfach dem Mantel zugeordnet) auf 1 S/m in 700 km Tiefe. Bis zu Tiefen von 1 000 km läßt sich die Leitfähigkeit mit Hilfe äußerer Anregungen bestimmen.

Im Bereich des unteren Mantels sind die Werte angelehnt an festkörperphysikalische Untersuchungen von Shankland et al. (1993) und steigen auf 30 S/m in 2900 km Tiefe an der Kern-Mantel-Grenze an. Sie liegen damit aber immer noch um Größenordnungen unter der Leitfähigkeit des flüssigen Eisens im äußeren Erdkern, die etwa  $5 \cdot 10^5$  S/m beträgt. Abbildung 2 zeigt die Lage der im Modell auftretenden Schichtgrenzen zwischen der Kern-Mantel-Grenze ( $r=c$ ) und der Erdoberfläche ( $r=a$ ).

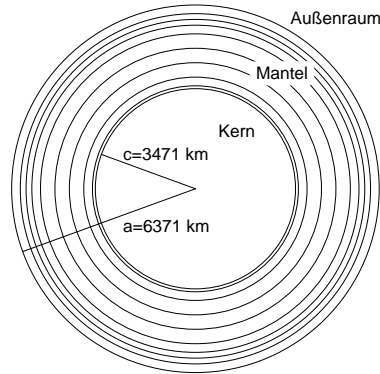


Abbildung 2: Der geschichtete Mantel

## Die Diffusionsgleichung

Verwendet werden sphärische Koordinaten  $(r, \vartheta, \lambda)$ . Bei der Herleitung der Diffusionsgleichung wird vorausgesetzt, daß die elektrische Leitfähigkeit  $\sigma$  zwischen zwei Kugelschalen konstant sei. Auch kann die zeitliche Änderung der Verschiebungsstromdichte vernachlässigt werden, d. h.  $\partial \mathbf{D} / \partial t = 0$ . Außerdem wird zunächst von einer harmonischen Anregung an der Kern-Mantel-Grenze ausgegangen. Dies führt zum Zeitfaktor  $\exp(i\omega t)$ . Mit diesen Voraussetzungen können das Ampèresche und das Faradaysche Gesetz geschrieben werden als

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad \text{und} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = -i\omega \mathbf{B} . \quad (2)$$

Hinzu kommt das Ohmsche Gesetz

$$\mathbf{j} = \sigma(r) \mathbf{E} \quad (3)$$

Aufgrund der Kugelsymmetrie können die Felder in poloidale und toroidale Anteile zerlegt werden (siehe z. B. Wolf-Gladrow, 1987), wobei man die entkoppelten Moden

$$(\mathbf{B}_P, \mathbf{j}_T) \quad \text{und} \quad (\mathbf{B}_T, \mathbf{j}_P) \quad (4)$$

erhält. Da außerhalb elektrischer Leiter nur  $\mathbf{B}_P$  beobachtbar ist, soll im folgenden nur das poloidale Magnetfeld betrachtet werden. Für  $\mathbf{B}_P$  und  $\mathbf{j}_T$  wird der Ansatz

$$\mathbf{B}_P = \nabla \times \nabla \times (\mathbf{r} P_B) , \quad (5)$$

$$\mathbf{j}_T = i\omega \sigma \mathbf{r} \times \nabla P_B \quad (6)$$

gemacht. Der Ansatz (6) ist so gewählt, daß Gleichung (2) bereits erfüllt ist. Aus  $\nabla \times \mathbf{B}_P = \mu_0 \mathbf{j}_T$  folgt weiter die Diffusionsgleichung

$$\nabla^2 P_B = i \omega \mu_0 \sigma P_B . \quad (7)$$

Für  $P_B$  macht man dann den Separationsansatz

$$P_B = \sum_{\ell=1}^{\infty} f_{\ell}(r) S_{\ell}(\vartheta, \lambda) \quad (8)$$

mit den Kugelflächenfunktionen  $S_{\ell}(\vartheta, \lambda)$ . Setzt man dies in Gleichung (7) ein, erhält man für  $f_{\ell}(r)$  die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\boxed{r \frac{d^2}{dr^2}(r f_{\ell}) = [i \omega \mu_0 \sigma r^2 + \ell(\ell+1)] f_{\ell}} , \quad (9)$$

die in der Schicht  $n$  die allgemeine Lösung

$$f_{\ell n} = A_n p_{\ell}(k_n r) + B_n q_{\ell}(k_n r) \quad \text{mit} \quad k_n^2 = i \omega \mu_0 \sigma_n \quad (10)$$

besitzt. Für die Funktionen  $p_{\ell}$  und  $q_{\ell}$  gilt

$$p_{\ell}(w) = \sqrt{\frac{\pi}{2w}} I_{\ell+\frac{1}{2}}(w) \quad \text{und} \quad q_{\ell}(w) = \sqrt{\frac{\pi}{2w}} K_{\ell+\frac{1}{2}}(w) , \quad (11)$$

wobei  $I_{\ell+1/2}$  und  $K_{\ell+1/2}$  modifizierte sphärische Besselfunktionen sind (siehe z. B. Abramowitz und Stegun, 1965, Abschnitt 10.2).  $p_{\ell}$  und  $q_{\ell}$  beschreiben nach innen bzw. nach außen laufende Wellen.

Für den Grenzfall  $k = (i\omega\mu_0\sigma)^{1/2} \rightarrow 0$  geht die Lösung

$$f_{\ell} = A p_{\ell}(kr) + B q_{\ell}(kr) \quad (12)$$

über in

$$f_{\ell} = \hat{A} r^{\ell} + \hat{B} r^{-(\ell+1)} . \quad (13)$$

Speziell für den Außenraum ( $\sigma=0$ ) muß  $f_{\ell} \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow \infty$  gelten. Dort erhält man für das Potential die bekannte Darstellung des Innenfeldes durch Kugelfunktionen

$$P_B = \sum_{\ell=1}^{\infty} f_{\ell}(r) S_{\ell}(\vartheta, \lambda) \quad (14)$$

$$= a \sum_{\ell=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{\ell+1} \sum_{m=0}^{\ell} [g_{\ell}^m \cos(m\lambda) + h_{\ell}^m \sin(m\lambda)] P_{\ell}^m(\cos \vartheta) . \quad (15)$$

Als nächstes lassen sich die einzelnen Schichten im Mantel aneinanderfügen, indem die Stetigkeit der Tangentialkomponenten des elektrischen und des magnetischen Feldes an den Schichtgrenzen verwendet wird. Damit ist es jetzt möglich, bei harmonischer Anregung aus dem Magnetfeld (vom Grad  $\ell$ ) an der Kern-Mantel-Grenze ( $r=c$ ) das Feld an der Erdoberfläche ( $r=a$ ) zu bestimmen. Insbesondere können die Verhältnisse der Amplituden von Radial- und Tangentialkomponente an der Erdoberfläche zu den Amplituden an der Kern-Mantel-Grenze berechnet werden:

$$\frac{B_{r\ell}(r=a)}{B_{r\ell}(r=c)} \quad \text{und} \quad \frac{B_{\vartheta\ell}(r=a)}{B_{\vartheta\ell}(r=c)}, \quad \frac{B_{\lambda\ell}(r=a)}{B_{\lambda\ell}(r=c)} . \quad (16)$$

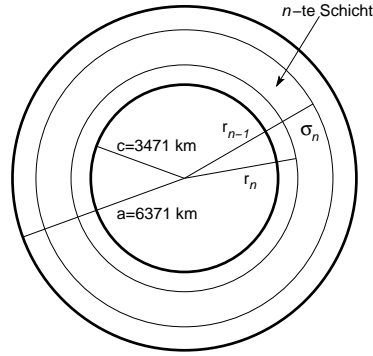


Abbildung 3: Die Schicht  $r_{n-1} \geq r \geq r_n$  besitzt die Leitfähigkeit  $\sigma_n = \text{const.}$

## Übertragungs- und Antwortfunktion

Die Übertragungsfunktionen für die radiale und tangential Magnetfeldkomponente als Funktion der Frequenz  $\omega$  und des Radius  $r$ , mit  $c \leq r \leq a$ , sind definiert durch

$$\tilde{\Gamma}_\ell(r, \omega) := \frac{B_{r\ell}(r, \omega)}{B_{r\ell}(c, \omega)} \quad \text{und} \quad \tilde{\Delta}_\ell(r, \omega) := \frac{B_{\vartheta\ell}(r, \omega)}{B_{\vartheta\ell}(c, \omega)} = \frac{B_{\lambda\ell}(r, \omega)}{B_{\lambda\ell}(c, \omega)}. \quad (17)$$

Aus den Übertragungsfunktionen erhält man durch Fouriertransformation unmittelbar die Impulsantwortfunktionen für die Anregung mit einer Diracschen  $\delta$ -Funktion an der Kern-Mantel-Grenze:

$$\Gamma_\ell(r, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{+i\omega t} \tilde{\Gamma}_\ell(r, \omega) d\omega \quad \text{und} \quad \Delta_\ell(r, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{+i\omega t} \tilde{\Delta}_\ell(r, \omega) d\omega \quad (18)$$

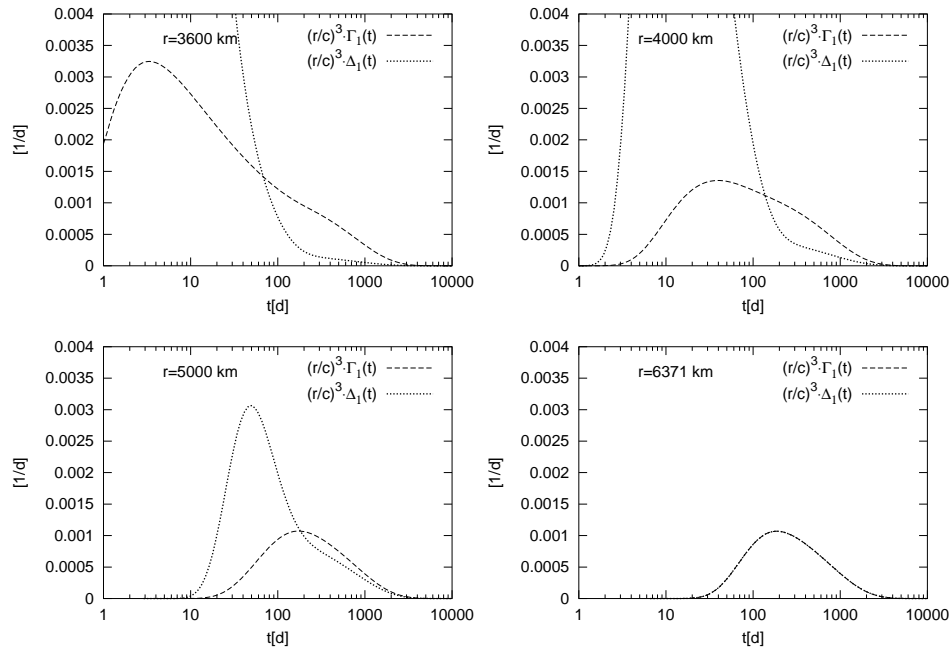
Bei beliebiger Anregung der radialen Magnetfeldkomponente an der Kern-Mantel-Grenze folgt die Antwort an der Erdoberfläche  $g_\ell(a, t)$  aus der Faltung der Anregungsfunktion  $g_\ell(c, t)$  mit der Impulsantwortfunktion (für alle Zeiten  $t' \leq t$ )

$$g_\ell(a, t) = \int_{-\infty}^t \Gamma_\ell(a, t-t') g_\ell(c, t') dt' \quad (19)$$

Ganz entsprechend gilt bei Anregung der tangentialen Komponente an der Kern-Mantel-Grenze mit  $d_\ell(c, t)$  für die Antwort an der Erdoberfläche  $d_\ell(a, t)$

$$d_\ell(a, t) = \int_{-\infty}^t \Delta_\ell(a, t-t') d_\ell(c, t') dt' \quad (20)$$

Die Abbildungen 4 und 5 zeigen Beispiele für die Anregung der radialen Komponente vom Grad  $\ell=1$  mit einer  $\delta$ -Funktion. Zu beachten ist, daß durch die Vorgabe der radialen Komponente auch der zeitliche Verlauf der tangentialen Komponente an der Kern-Mantel-Grenze festgelegt ist. In Abbildung 4 ist die mit  $(r/c)^3$  multiplizierte Antwortfunktion als Funktion der Zeit für verschiedene Radien aufgetragen, in Abbildung 5 als



**Abbildung 4:**  $\Gamma_1(r, t)$  und  $\Delta_1(r, t)$  über der Zeit für verschiedene Radien bei Anregung an der Kern-Mantel-Grenze mit  $\Delta_1(c, t) = \delta(t)$

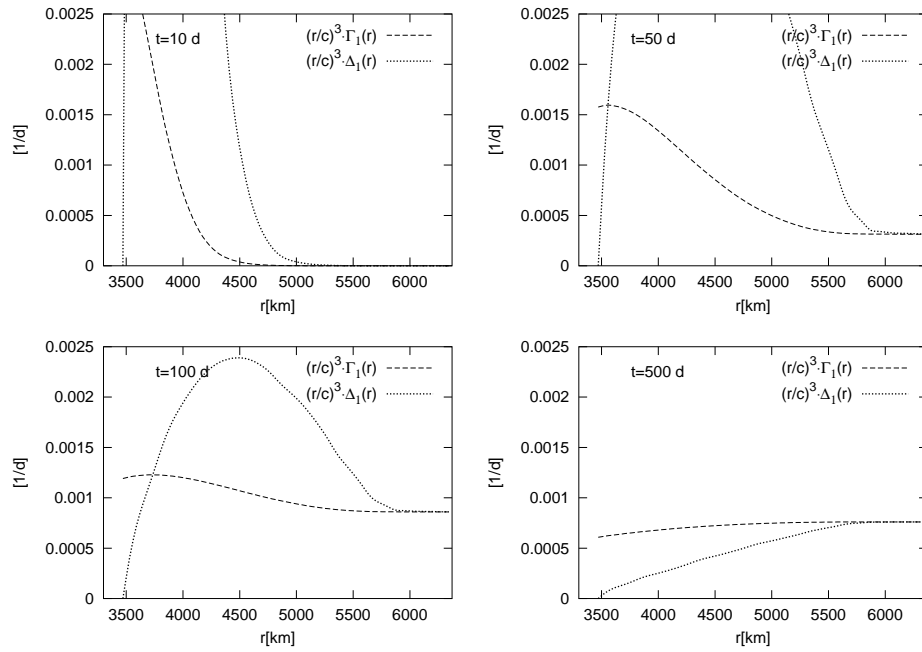
Funktion des Radius zu unterschiedlichen Zeitpunkten. Man kann ihnen entnehmen, daß die radiale Komponente schneller durch den Mantel diffundiert als die tangentielle. Beide Komponenten müssen an der Erdoberfläche zusammenfallen, wie man in Abbildung 4 unten rechts sehen kann. Auch in Abbildung 5 fallen beide Kurven für  $r = 6371$  km zu allen Zeiten zusammen.

## Diffusionszeit und gewichtete Leitfähigkeit

Man kann für den Mantel, bzw. ein Mantelmodell, charakteristische Zeitkonstanten einführen (Backus, 1983), von denen die einfachsten die Verzögerung und die Glättung des Signals beschreiben. Der Erdmantel wird als kausaler, zeit-invarianter, linearer und reeller Filter betrachtet.

Hier soll nur die Verzögerung betrachtet werden. Die Diffusionszeit wird mit Hilfe der Impulsantwortfunktion eingeführt. Betrachtet wird ein  $\delta$ -Impuls, der zum Zeitpunkt  $t=0$  an der Kern-Mantel-Grenze startet. Als Diffusionszeit wird der Schwerpunkt der Impulsantwortfunktion an der Erdoberfläche festgelegt. Für die Gesamtfläche unter der Impulsantwortfunktion gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(a, t) dt = \left(\frac{a}{c}\right)^{\ell+2}. \quad (21)$$



**Abbildung 5:**  $\Gamma_1(r, t)$  und  $\Delta_1(r, t)$  über dem Radius für verschiedene Zeiten bei Anregung an der Kern-Mantel-Grenze mit  $\Delta_1(c, t) = \delta(t)$

Für die Diffusionszeit im Fall der radialen Komponente gilt damit

$$\tau_\ell^R = \left(\frac{c}{a}\right)^{\ell+2} \int_{-\infty}^{\infty} t \Gamma(a, t) dt \quad (22)$$

$$= \mu_o c \int_c^a \underbrace{\frac{1}{2\ell+1} \frac{r}{c} \left[1 - \left(\frac{c}{r}\right)^{2\ell+1}\right]}_{w_\ell^R(r) :=} \sigma(r) dr, \quad (23)$$

und für die Diffusionszeit im Fall der tangentialen Komponente gilt entsprechend

$$\tau_\ell^T = \left(\frac{c}{a}\right)^{\ell+2} \int_{-\infty}^{\infty} t \Delta(a, t) dt \quad (24)$$

$$= \mu_o c \int_c^a \underbrace{\frac{1}{2\ell+1} \frac{r}{c} \left[1 + \frac{\ell+1}{\ell} \left(\frac{c}{r}\right)^{2\ell+1}\right]}_{w_\ell^T(r) :=} \sigma(r) dr. \quad (25)$$

Die Gewichtsfunktionen  $w_\ell^R(r)$  und  $w_\ell^T(r)$  beschreiben den Einfluß der Leitfähigkeit in Abhängigkeit vom Radius und vom Grad  $\ell$  der Anregung, siehe Abbildung 6. Die Gewichtsfunktion  $w_\ell^T$  ist stets größer als  $w_\ell^R$ . Daher ist auch die Diffusionszeit  $\tau_\ell^T$  immer größer als  $\tau_\ell^R$ , vgl. Tabelle 1. Der wichtigste Unterschied zwischen  $w_\ell^R(r)$  und  $w_\ell^T(r)$  besteht an der Kern-Mantel-Grenze. Dort gilt  $w_\ell^R(c) = 0$  und  $w_\ell^T(c) = 1/\ell$ . Die Diffusionszeit

der radialen Komponente hängt kaum von der Leitfähigkeit an der Kern-Mantel-Grenze ab. Betrachtet man nur die radiale Komponente, so enthält die Diffusionszeit kaum Informationen über die Leitfähigkeit in diesem Bereich. Anders ist die Situation für die Diffusionszeit der tangentialen Komponente, weil zu ihr auch die Leitfähigkeit im untersten Mantel Beiträge liefert.

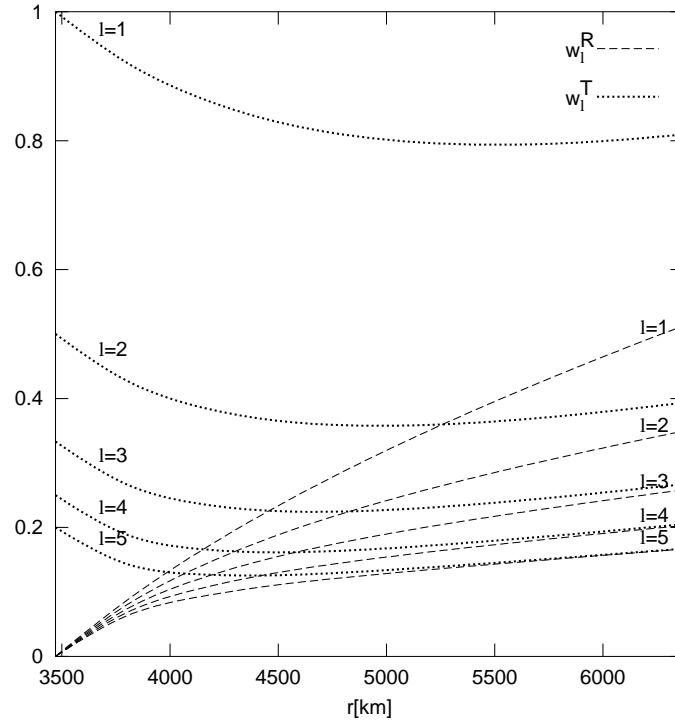


Abbildung 6: Gewichtsfunctonen  $w_\ell^R$  und  $w_\ell^T$

Für das hier verwendete Leitfähigkeitsmodell gelten die Diffusionszeiten in Tabelle 1. Für das Dipolfeld erhält man für die tangentiale Komponente die längste Diffusionszeit von 857 Tagen (etwa 2.3 Jahre). Die entsprechende Diffusionszeit der radialen Komponente ist mit 162 Tagen um etwa den Faktor 1/5 kleiner.

$\ell$	$w_\ell^R$ [d]	$w_\ell^T$ [d]
1	162	857
2	130	396
3	108	250
4	91	181
5	79	141
6	70	115
7	62	97
8	56	84
9	51	74
10	47	66

Tabelle 1: Diffusionszeiten für das Leitfähigkeitsmodell aus Abbildung 1

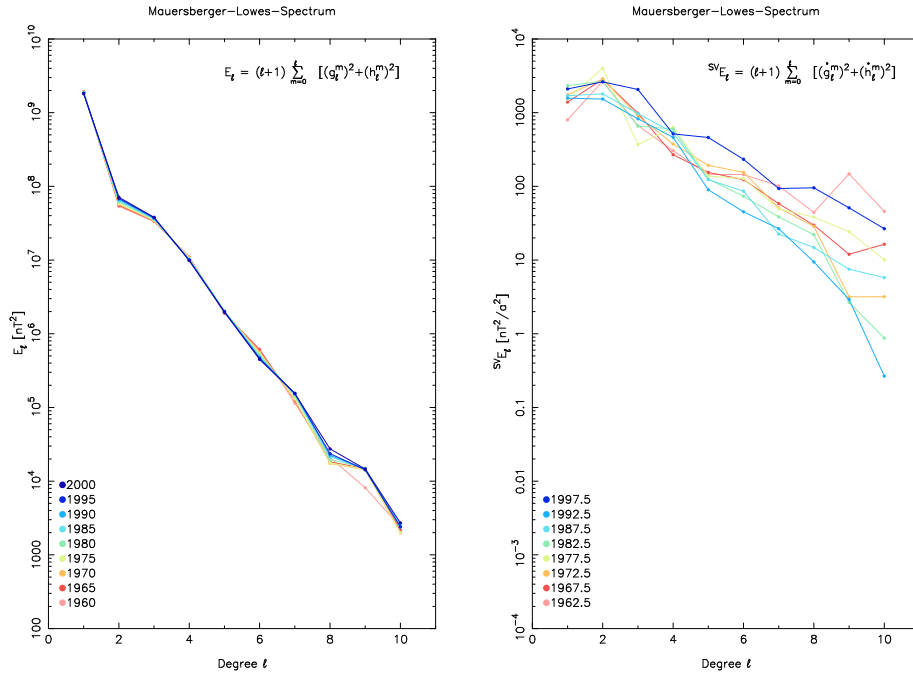


Abbildung 7: Mauersberger-Lowes Spektrum an der Erdoberfläche

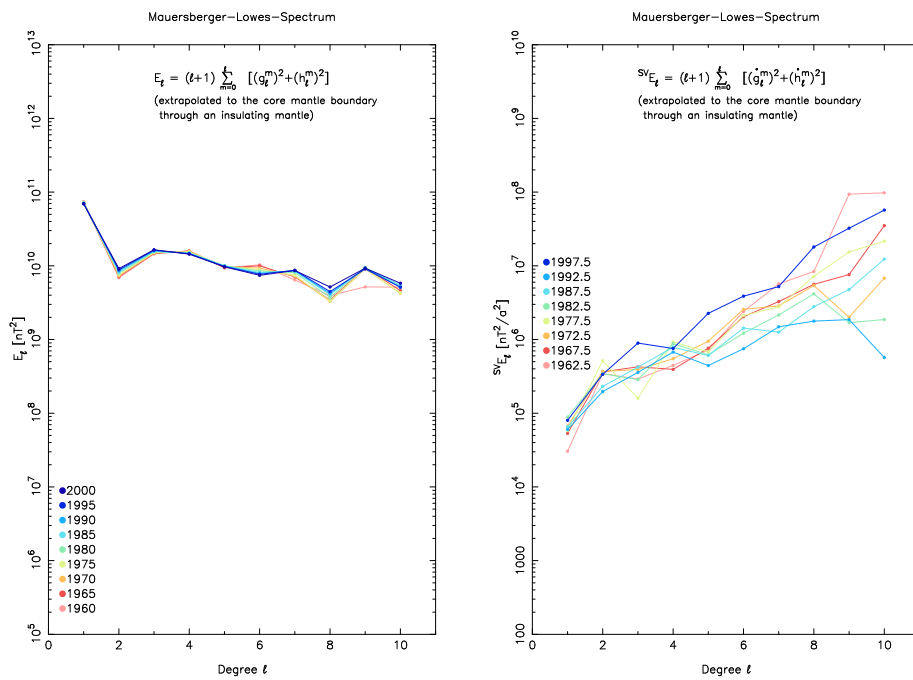


Abbildung 8: Mauersberger-Lowes Spektrum an der Kern-Mantel-Grenze, Fortsetzung in nicht-leitendem Mantel



## Fortsetzung der Säkularvariation an die Kern-Mantel-Grenze

Die Abbildung 7 zeigt links das Mauersberger-Lowes-Spektrum (siehe z. B. Langel, 1987) mit

$$E_\ell = (\ell+1) \sum_{m=0}^{\ell} [(g_\ell^m)^2 + (h_\ell^m)^2] \quad (26)$$

für die IGRFs (International Geomagnetic Reference Fields) zwischen 1960 und 2000 für Grade  $\ell \leq 10$ . Abbildung 8 links zeigt das durch den nicht-leitenden Mantel fortgesetzte Spektrum an der Kern-Mantel-Grenze. Dort ist das Spektrum nahezu unabhängig vom Grad  $\ell$ . Ausnahmen sind insbesondere der dominierende Dipol- und der schwächere Quadrupolanteil. Auf der rechten Seite der Abbildungen 7 und 8 ist die für die Säkularvariation analog eingeführte Größe

$${}^{\text{sv}} E_\ell = (\ell+1) \sum_{m=0}^{\ell} [(\dot{g}_\ell^m)^2 + (\dot{h}_\ell^m)^2] \quad (27)$$

aufgetragen. Die zeitliche Änderung der Gaußkoeffizienten ist aus den IGRFs abgeleitet. Die Frage ist nun, ob die in Abbildung 8 rechts dargestellte Fortsetzung durch den nicht-leitenden Mantel auch für das oben eingeführte Mantelmodell gültig bleibt, oder ob signifikante Abweichungen zu erwarten sind. Dazu wird die zeitliche Änderung der Gaußkoeffizienten einzeln durch den leitenden Mantel nach unten fortgesetzt (siehe Abbildung 9).

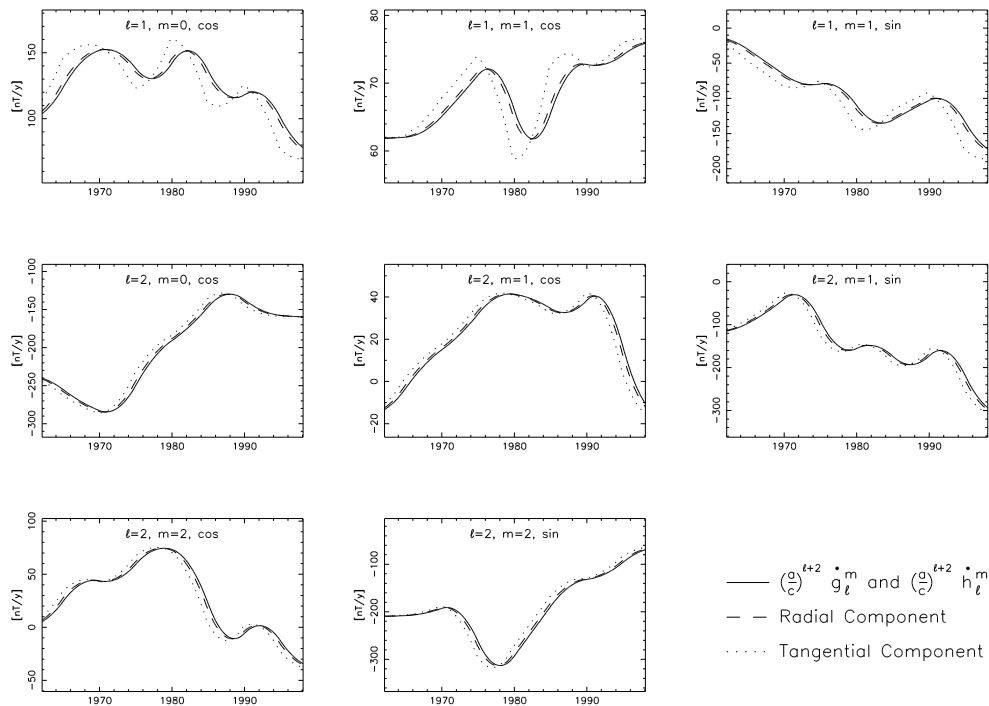


Abbildung 9: Säkularvariation an der Kern-Mantel-Grenze

Es stellt sich heraus, daß die Säkularvariation an der Kern-Mantel-Grenze lediglich um

die in Tabelle 1 aufgeführten Diffusionszeiten voraussetzt. Nur für  $\ell = 1$  tritt in der tangentialen Komponente neben der zeitlichen Verschiebung auch der Effekt auf, daß die Amplitude der Änderungen an der Kern-Mantel-Grenze größer ist. Es tritt in diesem Fall also neben der Verzögerung auch in geringem Maße Glättung auf. Zu einem wesentlichen Einfluß auf das Spektrum kommt es jedoch nicht. Ganz überraschend ist dieses Ergebnis allerdings nicht. Da die IGRFs alle 5 Jahre festgelegt werden, ist die Zeitskala der verwendeten Magnetfeldänderungen in derselben Größenordnung. Die Diffusionszeiten  $\tau_\ell^R$  und  $\tau_\ell^T$  für das Leitfähigkeitsmodell sind demgegenüber deutlich kleiner (mit Ausnahme vielleicht von  $\tau_1^T$ ). In diesem Fall eines schwach leitenden Mantels kommt es nur zu einer zeitlichen Verzögerung des Signals, die praktisch ohne Einfluß auf das Spektrum ist.

## Zusammenfassung

Bei der Betrachtung der Diffusion durch den elektrisch leitenden Mantel muß auch die tangential Komponente berücksichtigt werden. Die Diffusionszeit der tangentialen Komponente hängt von der Leitfähigkeit im gesamten Mantel ab. Die Gewichtsfunktion  $w_\ell^T(r)$  ist für alle  $r$  von vergleichbarer Größe. Dagegen spielt für die Diffusion der radialen Komponente die Leitfähigkeit an der Kern-Mantel-Grenze kaum eine Rolle, die Gewichtsfunktionen  $w_\ell^R(r)$  verschwindet für  $r = c$ .

## Literatur

- ABRAMOWITZ, M. und STEGUN, I. A., *Handbook of mathematical functions*, Dover Publications, New York, 1965.
- BACKUS, G. E., 1983, *Application of mantle filter theory to the magnetic jerk of 1969*, Geophys. J., **74**, pp. 713–746.
- LANGEL, R. A., *The Main Field*, vol. 1, Academic Press Ltd., London, 1987, pp. 249–521.
- SHANKLAND, T. J., PEYRONNEAU, J., und POIRER, J.-P., 1993, *Electrical conductivity of the Earth's lower mantle*, Nature, **366**, pp. 453–455.
- WOLF-GLADROW, D. A., 1987, *An introduction to poloidal and toroidal fields*, Mitteilungen aus dem Institut für Geophysik und Meteorologie der Universität zu Köln, **54**.