

Approximierte Sensitivität für *TEM*

Roland Martin¹ und Andreas Hördt²

Zusammenfassung

Es wird eine Approximationsmethode zur Generierung der Jacobimatrix der Sensitivitäten für die Bestimmung der Leitfähigkeitsverteilung durch Inversion von *TEM* Daten präsentiert. Die Approximation basiert auf der im Zeitbereich aufgestellten Konvolutionsgleichung für die Sensitivität. Bei der Konvolutionsgleichung wird die Berechnungszeit der Sensitivität eines Empfängers bezüglich einer Leitfähigkeitsvariation im Untergrund, durch die Anwendung des Reziprozitätsgesetzes erheblich reduziert. Die Sensitivität wird errechnet durch die Konvolution der Modellantwort im Untergrund mit der Impulsantwort (Green'sche Funktion) eines Empfängers. Anstatt die Green'sche Funktion in einem multidimensionalen Leitfähigkeitsmodell zu berechnen, wird diese in einem homogenen oder geschichteten Halbraum berechnet. Dies führt zu einer erheblichen Verkürzung der Rechenzeit, gegenüber der genauen Sensitivität, um zwei bis drei Größenordnungen pro benutzten Empfänger. Die qualitative Übereinstimmung mit der genauen Sensitivität wird anhand einer einfachen long-offset *TEM* Sender Empfänger Konfiguration verifiziert. Die präsentierten Approximierten Sensitivitäten sollen eine Inversion von *TEM* Daten ermöglichen die bislang aufgrund der Komplexität und dem damit verbundenen Rechenaufwand nicht durchführbar sind. Weitere Einsparpotenziale bietet noch die Optimierung der Konvolutionsroutinen für logarithmisch äquidistante Daten, die aufgrund der erhöhten Datenmenge ins Gewicht fällt und hier vorgestellt wird.

1 Einleitung

Inversion von elektromagnetischen (*EM*) Messungen zur Bestimmung der Leitfähigkeitsverteilung im Untergrund, ist ein nichtlinearer Vorgang. Eine klassische Methode dies Anzugehen ist die Linearisierung des Problems und über ein iteratives Verfahren die Lösung durch Modellvergleich zu erhalten. Solche Linearisierungsmethoden wie beispielsweise das Marquardt Verfahren [Vozoff und Jupp, 1975] oder die OCCAM Inversion [deGroot Hedlin und Constable, 1990] machen gebrauch von der Sensitivitäts- oder Jacobimatrix. Die Elemente dieser Matrix sind die partiellen Ableitungen der Daten d hinsichtlich Änderung der Modellparameter m ,

$$J_{ij} = \frac{\partial d_i}{\partial m_j}; \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M \quad (1)$$

bei der N die Anzahl der Messungen und M die Anzahl der Modellparameter ist. Die Berechnung der Jacobimatrix ist also sehr entscheidend für die Inversion von *EM* Messungen zur Bestimmung der Leitfähigkeitsverteilung. Die drei am heufigsten verwendeten Methoden um diese zu berechnen sind die 'brute-force' oder Perturbationsmethode, die Sensitivitätsgleichungsmethode [Rodi, 1976] und die adjoint Methode [McGillivray und Oldenburg, 1990]. Die Berechnungszeiten der Jacobimatrix für die ersten beiden Methoden ist proportional zu M und für die letzte proportional zu N . Die Errechnung der Sensitivitäten nach der Konvolutionsgleichung ist als Zeitbereichs

¹Institut für Geophysik und Meteorologie der Universität zu Köln, Aussenstelle Explorationsgeophysik, Godesberger Strasse 10, D-50968 Köln

²Geologisches Institut Fachrichtung Angewandte Geophysik, Universität Bonn, Nussallee 8, D-53115 Bonn

Äquivalent zur adjoint Methode aufzufassen [Hördt, 1998]. Die Berechnungszeit ist auch hier proportional zu N . Die Approximation wird für diese relativ neue Methode vorgestellt.

Approximierte Jacobimatrizen, speziell für die Inversion von MT Daten wurden von *Smith und Booker* [1991] und von *Ellis et al.* [1993] benutzt. Die Approximation für die Sensitivität begründete sich auf Sensitivitäten für das $1D$ Magentotellurik Inversionsproblem. Für die Inversion von $2D$ MT Daten zeigte sich, dass die Näherung gut ist, aber für Raumsegenete, die nicht unterhalb einer Messung liegen ist diese Näherung nicht mehr ausreichend. Die auf diese Weise berechnete Jacobimatrix wird deswegen als nicht nicht vollständig betrachtet [Ellis et al., 1993], da wichtige mehrdimensionale Eigenschaften nicht in der Jacobimatrix vorhanden waren. Die Approximation von *Farquharson und Oldenburg* [1996] wurde als fast vollständige Jacobimatrix bezeichnet. In dieser waren die mehrdimensionalen Eigenschaften des Modellraumes genügend ausgeprägt um einen Inversionsalgorithmus für $3D$ MT Daten ins Ziel konvergieren zu lassen. Die Approximation der adjoint equation wurde von den Autoren durch eine Näherungslösung der adjoint Felder in einem homogenen oder geschichteten Halbraum durchgeführt. Die dadurch erreichte Zeitersparnis war enorm.

Die o.g Methoden arbeiten alle im Frequenzbereich, wobei formal eine Fouriertransformation als Schnittstelle dienen könnte um Daten entweder vom Zeit in den Frequenzbereich oder zurückzutransformieren. Untersuchungen zeigten allerdings, dass die grosse Bandbreite, die für eine akkurate TEM Modellantwort benötigt werden, diesen Ansatz stark beschränken [Newman et al., 1986]. Deswegen entwickelte Hördt [1998] die Konvolutionsmethode, um genaue Sensitivitäten direkt im Zeitbereich zu berechnen. Diese Methode wurde auch von *Schneider* [2000] verwendet, um die genaue Sensitivität der Konvolutionsmethode auf mehrdimensionale Eigenschaften zu untersuchen und das Sensitivitätsverhalten unterschiedlicher Integrationsräume zu betrachten.

Zur Berechnung der genauen Sensitivität wird die hier vorgestellte differentielle Konvolutionsmethode benutzt. Diese baut auf der von Hördt [1998] entwickelten Konvolutionsmethode auf und stellt eine Möglichkeit zu einer sehr schnellen Berechnung der Sensitivität direkt im Zeitbereich dar. Zur Erklärung der Zusammenhänge für eine genaue Sensitivitätsberechnung mit der differentielle Konvolutionsmethode, soll am Anfang von Abschnitt 2 die Herleitung der Konvolutionsmethode nach Hördt [1998] skizziert werden, um dann auf den Vorteil der differentielle Formulierung einzugehen. Danach wird die darauf aufbauende Methode zur Berechnung von Approximierten Sensitivitäten vorgestellt. Bei dieser Näherung wurde im wesentlichen die Idee von *Farquharson und Oldenburg* [1996] aufgegriffen und eine Näherung für Halbraum oder geschichtete Halbraumlösungen in die differentielle Konvolutionsmethode eingebaut.

In den meisten geophysikalischen Anwendungen, die im Zeitbereich arbeiten, erfolgt aus numerischen Gründen die Berechnung der Daten in logarithmisch äquidistanten Zeitschritten. Die klassische Konvolution dieser Daten ist für eine grosse Datenmenge sehr langsam. Deshalb sind hier große Einsparpotentiale für beschleunigte Sensitivitätsberechnung zu vermuten. Die Konvolution logarithmisch äquidistanter Daten ist also sehr wichtig und es wird in Abschnitt 4 eine Möglichkeit zur schnelleren Faltung dieser Daten gezeigt.

Am Ende werden die vorgestellten Methoden für ein einfaches Modell getestet und untereinander, als auch mit der herkömmlichen Methode zur Sensitivitätsberechnung, der Perturbationsmethode, verglichen. Hauptsächlich geht es dabei darum, ob $3D$ Eigenschaften in den Approximierten Sensitivitäten zu identifizieren, und damit für eine mehrdimensionale Inversion geeignet sind. Die Sender Empfänger Konfiguration entspricht einer typischen Auslage der long-offset transient electromagnetic ($LOTEM$) welche ausführlich beschrieben wird in *Strack* [1992].

2 Genaue Sensitivitäten

Die Geometrie zur Berechnung der Sensitivitäten ist in Abbildung 1 dargestellt. Ein Sender liegt im Ursprung und ein Empfänger bei \mathbf{r} . Für die Herleitung einer Gleichung für die Sensitivität des Empfängers aufgrund einer Leitfähigkeitsänderung in einem kleinen Volumen V beginnt *Hördt* [1998] mit der Integralgleichung im Zeitbereich für das elektrische Feld am Ort des Empfängers [*Hohmann*, 1988]:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}^p(\mathbf{r}, t) + \int_V \int_0^t \underline{\underline{\mathbf{G}}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - t') \mathbf{J}_a(\mathbf{r}', t') dt' dV' \quad (2)$$

Diese Gleichung beschreibt, wie sich das totale elektrische Feld \mathbf{E} aus einem Primärfeld \mathbf{E}^p ohne Leitfähigkeitsänderung und dem Feld das von einem anomalen Stromfluss $\mathbf{J}_a = \mathbf{E} \Delta \sigma$ in V generiert wird, zusammensetzt. Hier ist $\Delta \sigma$ die Leitfähigkeitsänderung und \mathbf{E} ist das totale elektrische Feld innerhalb von V . Die Green'sche Funktion $\underline{\underline{\mathbf{G}}}$, ist eine tensorielle Größe die einen Empfänger bei \mathbf{r} mit der anomalen Stromquelle bei \mathbf{r}' verknüpft.

Für kleine Leitfähigkeitsänderungen in dem Volumen V kann die Born'sche Näherung angewendet werden [*Chave*, 1984; *Boerner und West*, 1989] was bedeutet, dass im Körper $\mathbf{E} \approx \mathbf{E}^p$ gilt. Dies beinhaltet auch die Annahme, dass das Volumen V klein und die Leitfähigkeit innerhalb von V konstant ist. Beide Größen können somit vor das Integral gezogen werden und durch Umformung ergibt sich:

$$\frac{\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{E}^p(\mathbf{r}, t)}{V \Delta \sigma(\mathbf{r}')} = \int_0^t \underline{\underline{\mathbf{G}}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t - t') \mathbf{E}^p(\mathbf{r}', t') dt' \quad (3)$$

Im Grenzwert $\Delta \sigma \rightarrow 0$ folgt für die Sensitivität \mathbf{S} :

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, t) = \frac{1}{V} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial \sigma(\mathbf{r}')} = \int_0^t \underline{\underline{\mathbf{G}}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t - t') \mathbf{E}^p(\mathbf{r}', t') dt' \quad (4)$$

Die so definierte Sensitivität kann als Sensitivitätsdichte aufgefasst werden, denn sie gilt im Grunde innerhalb infinitesimal kleiner Volumina. Um zu beschreiben, wie sich die Leitfähigkeitsänderung eines bestimmten Raumsegments in Abhängigkeit von dessen Ausdehnung, auf die Modellantwort auswirkt, muss die Sensitivitätsdichte über dieses Raumsegment integriert werden.

Die Einträge im Green'schen Tensor sind die Modellantwort eines elektrischen Impulses zwischen einem Sender am Ort \mathbf{r}' und einem Empfänger am Ort \mathbf{r} . Für \mathbf{G}_{xy} platziert man einen nach y -ausgerichteten elektrischen Dipol bei \mathbf{r}' und berechnet die elektrische Impulsantwort bei \mathbf{r} in

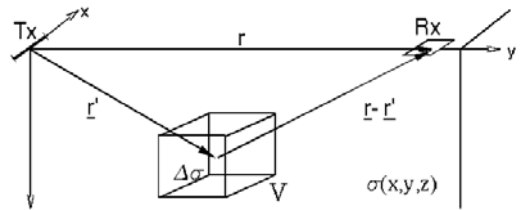


Abbildung 1: Modell für die Berechnung der Sensitivitäten nach der Konvolutionsmethode. Der Sender T_x im Ursprung. Der Empfänger R_x ist im Abstand \mathbf{r} installiert.

Richtung x [Weidelt, 1975]. Nach dem Reziprozitätsgesetz können hierbei Sende und Empfangsfunktion vertauscht werden, d.h. dass das Signal sich nicht ändert wenn der Sender empfängt und der Empfänger sendet, also [Hohmann, 1988]:

$$\underline{\underline{\mathbf{G}}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = \underline{\underline{\mathbf{G}}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (5)$$

Wenn nur eine Komponente des Senders betrachtet wird, ist nur eine Zeile des Green'schen Tensors von Null verschieden. Aus dem Matrix Vektor Produkt aus Gleichung 4 wird dann ein Skalarprodukt.

Im Folgenden soll der Sender ein fest installierter, horizontaler elektrischer Dipol in x -Richtung sein. Der Empfänger und auch die Punkte für die eine Sensitivitätsdichte berechnet wird liegen in der y - z Ebene senkrecht zum Sendermittelpunkt. Für diese Konfiguration kann Gleichung 4 geschrieben werden als

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, t) = \partial_t \mathbf{E}^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) * \mathbf{E}^P(\mathbf{r}') \quad (6)$$

Hier bezeichnet $*$ die Konvolution. $\partial_t \mathbf{E}^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$ ist die Green'sche Funktion, die als zeitliche Ableitung der Modellantwort auf ein stufenförmiges Einheitsstromsignal errechnet wird. Der hochgeschriebene Index steht dafür, dass die Quelle am Ort des Empfängers steht. Gleichung 6 benutzen Hördt [1998]; Schneider [2000] als Grundlage ihrer Berechnungen.

Impulsantworten zu sehr frühen Zeiten und sehr nah an der Quelle bzw. am Empfänger sind nahezu singular und es ist keine akkurate Berechnung gewährleistet [Kaufman und Keller, 1983]. Deswegen führte Hördt [1998] unter einer Integralbedingung, Korrekturen für diese Impulsantworten ein.

Wenn die Impulsantwort nicht direkt berechnet wird, lässt sich numerisch eine zeitliche Ableitung der Modellantwort über $\partial_t E(t) = \frac{\Delta E(t)}{\Delta t}$ erreichen. Betrachtet man die diskrete Formulierung der Konvolutionsgleichung 4 ergibt sich nach vertauschen der Konvolutionsargumente eine numerische Vereinfachung für die Implementierung der Impulsantwort:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^R(\mathbf{r}', \mathbf{r}, t) &= \sum_0^t \mathbf{E}^P(\mathbf{r}', t - t') \frac{\Delta \mathbf{E}^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t')}{\Delta t'} \Delta t' \\ &= \sum_0^t \mathbf{E}^P(\mathbf{r}', t - t') \Delta \mathbf{E}^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t') \end{aligned} \quad (7)$$

Diese Gleichung kann als differentielle Konvolutionsmethode betrachtet werden, da das eine Argument $\Delta \mathbf{E}^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$ eine Differenz zwischen Modellantworten zu zwei Zeitpunkten darstellt.

Es stellte sich heraus, dass die Berechnung der zeitlichen Differenzen der Modellantworten, auch zu sehr frühen Zeitpunkten, stabiler als die der Impulsantworten verlief. Daraus ergibt sich der Vorteil einer größeren numerischen Stabilität der Sensitivität für Raumpunkte in Sender- und Empfänger- nähe bei denen die zeitliche Änderung der Modellantwort gross gegenüber dem Zeitschritt, das zeitliche Verhalten also schlecht aufgelöst ist.

3 Approximierte Sensitivitäten

Das hier benutzte 3D Modellierungsprogramm *sldmem3t* von Druskin und Knizhnermann [1988], ermöglicht die Berechnung aller Komponenten des elektrischen Feldes an jedem Punkt des leitfähigen

gen Modellraumes ohne zeitlichen Mehraufwand. Deswegen braucht die Sensitivitätsberechnung nach Gleichung 7 nur zwei Vorwärtsrechnungen pro Sender/Empfänger Paar. Eine für das elektrische Hintergrundfeld \mathbf{E}^p und eine für die Green'sche Funktion, die numerisch durch $\Delta \mathbf{E}^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ errechnet wird. Für einen Sender und N Empfänger ist die Anzahl der benötigten Vorwärtsrechnungen proportional zu N . Berechnet man die Sensitivität hingegen durch sukzessive Veränderung der Leitfähigkeit in einem kleinen Volumen wie bei der Perturbationsmethode, ist die Anzahl der benötigten Vorwärtsrechnungen proportional zur Anzahl der Modellparameter M . Im allgemeinen Fall übersteigt die Modellparameteranzahl M die Zahl der Empfänger N bei weitem [Sasaki, 1989], die Konvolutionsmethode ist also wesentlich effizienter.

Um eine vollwertige Jacobimatrix nach Gleichung 1 zu erhalten, muss die Sensitivitätsdichte nach Gleichung 7 noch für jedes Parameter Volumen aufintegriert werden. Der numerische Aufwand hierfür ist aber vernachlässigbar gegenüber einer 3D Vorwärtsrechnung für jeden Parameter. Darüberhinaus wird in einem iterativen Inversionsalgorithmus das elektrische Feld \mathbf{E}^p zu jedem Iterationsschritt für den Vergleich zwischen aktueller und gemessener Modellantwort berechnet. Der hauptsächliche Rechenaufwand zur Sensitivitätsberechnung nach der adjoint Methode oder der Konvolutionsmethode fällt also der Errechnung der geeigneten Green'schen Funktion zu. Um dies für die adjoint Gleichung zu beschleunigen, wurde von Farquharson und Oldenburg [1996] die Berechnung der Green'sche Funktion, mittels schnell zu errechnender Vorwärtslösungen für homogene oder eindimensionaler Leitfähigkeitsmodelle, approximiert. Eine Grundlegende Idee dahinter ist, dass die Impulsantwort in der Nähe des Empfängers hauptsächlich von geometrischen Faktoren und weniger von der Leitfähigkeit des zugrundeliegenden Modells abhängt.

Im Zeitbereich wird diese Approximation für die Konvolutionsmethode erreicht, indem angenommen wird, dass das Tiefenprofil der Leitfähigkeit direkt unterhalb des Empfängers, in horizontaler Richtung unendlich ausgedehnt ist. Für den Vergleich zwischen dieser Approximation und der genauen Sensitivität sind zusammengefasst folgende Gleichungen betrachtet worden:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\text{genau}} &= \mathbf{E}^p * \mathbf{G}^{3D} \\ \mathbf{S}_{\text{approximiert}} &= \mathbf{E}^p * \mathbf{G}^{1D} \end{aligned}$$

Es ist allerdings zu beachten, dass die approximiert, also mittels \mathbf{G}^{1D} berechneten Einträge der Jacobimatrix nicht alle Eigenschaften der genauen Sensitivitäten haben können, was anhand der Beispielrechnung in Abschnitt 5 verifiziert wird.

Eine Anleitung zum berechnen der 1D Modellantwort für die bei TEM meistens benutzten E_x und H_z Empfänger, die zum errechnen der Impulsantwort als Sender benutzt werden, findet sich beispielsweise bei Weidelt [1986] oder Hohmann [1988]. Für einen horizontalen H_x Empfänger ist eine Lösung bei Dey und Ward [1970] angegeben und die hier benutzten digitalen Filter sind detailliert in Anderson [1979] beschrieben.

Das verwendete Modellierungsprogramm *sldmem3t* und der 1D Code berechnen aus numerischen Gründen in logarithmisch äquidistanten Zeitschritten ihre Ergebnisse, d.h. die Modellfunktionen existieren immer zu logarithmisch äquidistanten Zeitschritten. Dieser Umstand wird bei der Konvolution nun ausgenutzt um ein zeitlich optimiertes Falten dieser Daten zu erreichen.

4 Konvolution logarithmisch äquidistanter Daten

Zeitabhängige Funktionen sind beispielsweise dann logarithmisch äquidistant, wenn die Funktion an den Stellen $t_n = t_0 10^{\frac{n}{b}}$, $n = 0, \dots, M$; $t_0, b > 0$ abgetastet ist. b ist gleich der Anzahl der Stütz-

stellen jeder Dekade. Für die benutzten 1D und 3D Programme ist beispielsweise $b = 10$, was bedeutet, dass zehn Werte der Modellfunktion in jeder Zeitdekade vorhanden sind.

Eine klassische Möglichkeit, die Faltung zwischen logarithmisch äquidistanten Daten vorzunehmen ist, die Daten linear abzutasten und anschließend das Faltungsintegral zu berechnen.

Die neue Abtastung führt zu neuen Stützstellen: $t_m = t_0 m$, $m = 1, \dots, 10^{\frac{M}{b}}$. Dies bedeutet also mindestens $10^{2\frac{M}{b}}$ Multiplikationen für die Faltung von zwei Modellfunktionen nach bisherigem Algorithmus. Für die Berechnung der Sensitivitätsdichte nach Gleichung 7 muss jedoch die Faltung der Modellantwort an allen Punkten des Modellraums berechnet werden was eine immense zu faltende Datenmenge bedeutet. Hierzu ein Zahlenbeispiel, um das Ausmaß der Berechnung nach der bisherigen Methode darzustellen:

Die Anzahl der Multiplikationen richtet sich stark nach der Anzahl der Dekaden, welche erfasst werden sollen. Ein Zeitfenster von 3 Dekaden ($M = 30$) wird also für jeden Raumpunkt eine Millionen Multiplikationen bedeuten. Für eine Raumgitter von $60 \times 40 \times 30$ Punkten (eine übliche Grösse für 3D Vorwärtslösungen) und drei Raumkomponenten also ca. $2.16 \cdot 10^1$ Multiplikationen. Dies bedeutet selbst für heutige Grossrechner einen nicht unerheblichen Rechnezeitaufwand, der aber optimiert werden kann.

Die Konvolution diskreter Daten kann qualitativ als folgende Summe aufgefasst werden:

$$S_n = \sum_{k=0}^N X_{n-k} Y_k$$

Hierbei sei angenommen, dass die Stützstellen der Funktionen logarithmisch äquidistant verteilt sind. Das bedeutet aber auch, dass X nicht notwendigerweise an den Stellen $n - k$ definiert ist. Nach dem neuen Ansatz wird zu jeder Stelle von X_{n-k} außerhalb der Stützstellen ein Wert der Modellfunktion über eine kubische spline Interpolation (z.B. [Press et al., 1995]) berechnet. Beide Modellfunktionen werden also nicht mehr komplett linear abgetastet, da Y_k schon zu den geeigneten Abtaststellen k bekannt ist. Es müssen so also nur noch M^2 Multiplikationen pro Raumpunkt, für obiges Beispiel also ca. $1.94 \cdot 10^8$ Multiplikationen berechnet werden. Dies ist ein Faktor 62500 für 4 Dekaden, der Rechenzeitgewinn also enorm.

5 Beispiel

Abbildung 2 zeigt ein einfaches Modell zur Untersuchung, ob sich eine 3D Leitfähigkeitsstruktur in den Eigenschaften einer Approximierten Sensitivität zeigt, und diese Approximation damit zu Inversionszwecken geeignet wäre. In der Modellstudie wurde in einen homogenen Halbraum mit einem Widerstand von $100 \Omega m$ in einer Tiefe von 1 km, ein gut leitender Block eingefügt. Die horizontalen Abmessungen sowie Sender (T) und Empfänger (R) Lokationen sind der Abbildung zu entnehmen.

Zur Kontrolle und Vergleich an einem konkreten Raumpunkt sind in Abbildung 3 die relativen Differenzen der Sensitivitäten im direkten Vergleich mit der Perturbationsmethode zu sehen. Diese ist zur Kontrolle relativ simpel zu berechnen. Dazu wurde in das Modell ein zusätzlicher Block an der Stelle eingebaut, an der die Sensitivitätsdichte mit dieser Methode verglichen werden soll.

Die Approximierten als auch die genauen Sensitivitätsdichten stimmen zu allen Zeiten gut mit der Perturbationsmethode überein, da die Abweichungen sowohl für den E_x als auch für den H_z Empfänger unter 1% liegen. Die Methoden untereinander stimmen sogar noch besser Überein;

Die relative Differenz zwischen Approximierten und genauen Sensitivitäten ist für beide Empfänger größtenteils unter einem Promill. Die Berechnungszeiten für die Green'sche Funktion der genauen Sensitivität betrug ca. 20 min. auf einem 850 MHz Pentium III PC und für G^{1D} weniger als 2 Sekunden. Der Rechenzeitgewinn steigt proportional zur Anzahl der Empfänger die in der TEM Messung herangezogen werden.

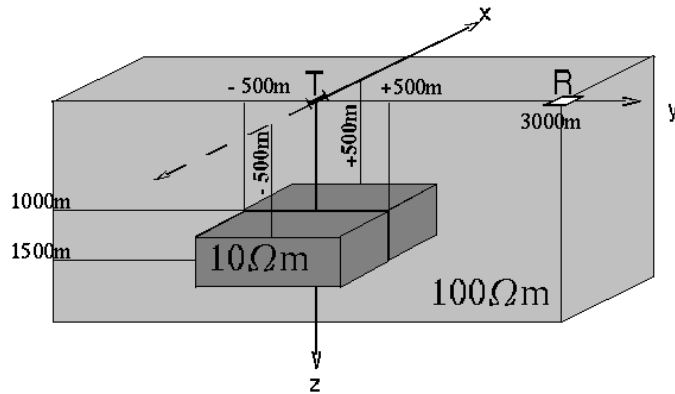


Abbildung 2: Modell für die Berechnung der Sensitivitäten nach der Konvolutionsmethode. Der Sender T_x im Ursprung. Der Empfänger R_x ist im Abstand r installiert.

Die Ergebnisse der Konvolutionsmethode mit und ohne Approximation sind in den Abbildungen 4 und 5 als Vertikalschnitte in der Äquatorebene des Senders zu sehen. Die Sensitivitätsdichte ist für einen E_x und einen H_z Empfänger zu je zwei ausgewählten Zeitpunkten gezeigt. In den linken Hälften der Abbildungen sind immer die Approximierten und in den rechten die genauen Sensitivitäten, für den direkten optischen Vergleich, zu sehen. Die Farbskaleneinteilung der Amplituden ist mittels einer logarithmischen Transformation erfolgt, bei der das Vorzeichen beachtet wird.

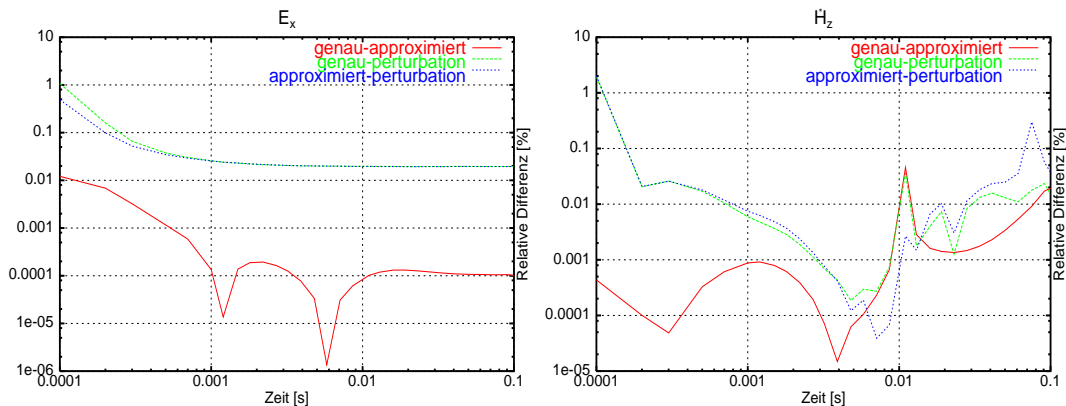


Abbildung 3: Sensitivitätsvergleich zwischen genauen, Approximierten und mit der Perturbationsmethode berechneten Sensitivitäten am Ort $x = 0m, y = 1500m, z = 300m$ für einen E_x Empfänger (links) und einen H_z Empfänger (rechts). Für die Perturbationsmethode wurde an der Stelle $x = 0m, y = 1500m, z = 300m$ ein Block mit $100m$ Kantenlänge installiert und der Widerstand um 15% variiert.

In den Abbildungen auf der folgenden Seite ist der räumliche Verlauf der Amplituden von E_x -Sensitivitätsdichten gezeigt. Deutlich zu erkennen ist die symmetrische Struktur in der direkten Umgebung von Sender und Empfänger als eine direkte Folge des Reziprozitätsgesetzes. Die Symmetrieachse wird vom Schnitt der Betrachtungsebene mit derjenigen Ebene, welche senkrecht zur

Verbindungsline Sender-Empfänger verläuft und diese in ihrem Mittelpunkt schneidet, gebildet. Es zeigt sich in beiden Seiten, ab einer Tiefe von etwa 1000m unterhalb des Senders, eine Struktur in den Konturlinien des Sensitivitätsverlaufs die von der Symmetrie abweicht. Die Isolinien der Sensitivitätsdichten haben dort einen Knick in ihrem Verlauf und sind kleiner im Vergleich zu denen des umgebenden Halbraums. Der Bereich dieser Strukturen in der gezeigten Ebene, stimmt sehr gut mit den räumlichen Abmessungen des eingelagerten Störkörpers überein. Die Eigenschaften des dreidimensionalen Störkörpers sind somit in den Approximierten Sensitivitäten des E_x -Empfängers enthalten.

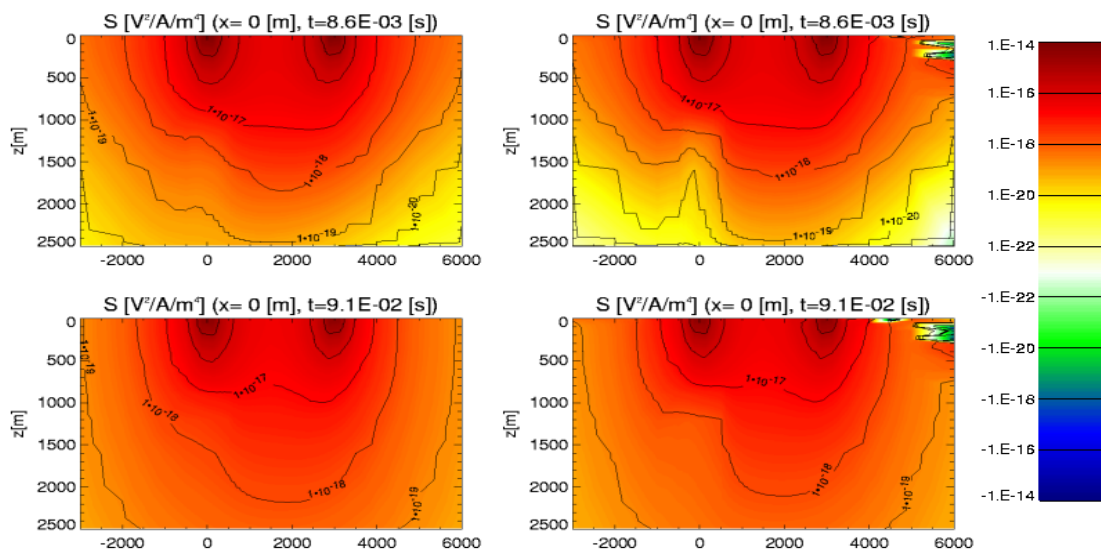


Abbildung 4: Dargestellt ist die Sensitivitätsdichte eines E_x Empfängers zum qualitativen Vergleich zwischen Approximierten (links) und genauen Sensitivitätsberechnungen (rechts). Zu sehen ist ein Ausschnitt der y - z Ebene senkrecht zum Mittelpunkt des Senders zu zwei Zeitpunkten

In den Abbildungen auf der nächsten Seite sind die Amplituden der \dot{H}_z Sensitivitätsdichten dargestellt. Das zeitliche Verhalten dieser Sensitivitätsdichten erweist sich als wesentlich komplexer im Vergleich zu entsprechenden E_x Sensitivitäten und das \dot{H}_z Feld klingt zu späten Zeiten schneller ab als das elektrische Feld [Petry, 1987]. Deswegen wurde hier das erste Zeitfenster früher gewählt als bei den E_x Sensitivitätsdichten. Der letzte Zeitpunkt von \dot{H}_z stimmt aber mit dem ersten Zeitpunkt von E_x überein um eine Vergleichsmöglichkeit darzustellen.

Es fällt auf, dass zu keinem Zeitpunkt eine symmetrische Struktur der Sensitivitätsdichten wie bei denen für den elektrischen Empfänger vorhanden ist. Im Bereich des Halbraums direkt unterhalb der Empfängerspule bei 3000m ist eine Diskontinuität in allen Zeitfenstern zu finden. Blöcke die sich direkt unterhalb des Empfängers befinden können also nicht aufgelöst werden, da die entsprechenden Sensitivitätsdichten verschwinden [Petrat, 1996].

Das wichtige ist, dass der Block mit der erhöhten Leitfähigkeit in allen gezeigten Abbildungen als eine Eigenschaft der Approximierten als auch der genauen Sensitivitäten zu identifizieren ist. Ein iteratives Verfahren das mittels Modellvergleich die Diskrepanz zwischen gemessenen und berechneten Daten zu minimieren versucht, könnte möglicherweise mit den Approximierten Sensitivitäten eine Inversion durchführen, da die optischen Unterschiede zwischen Approximierten

und genauen Sensitivitätsdichten gering sind.

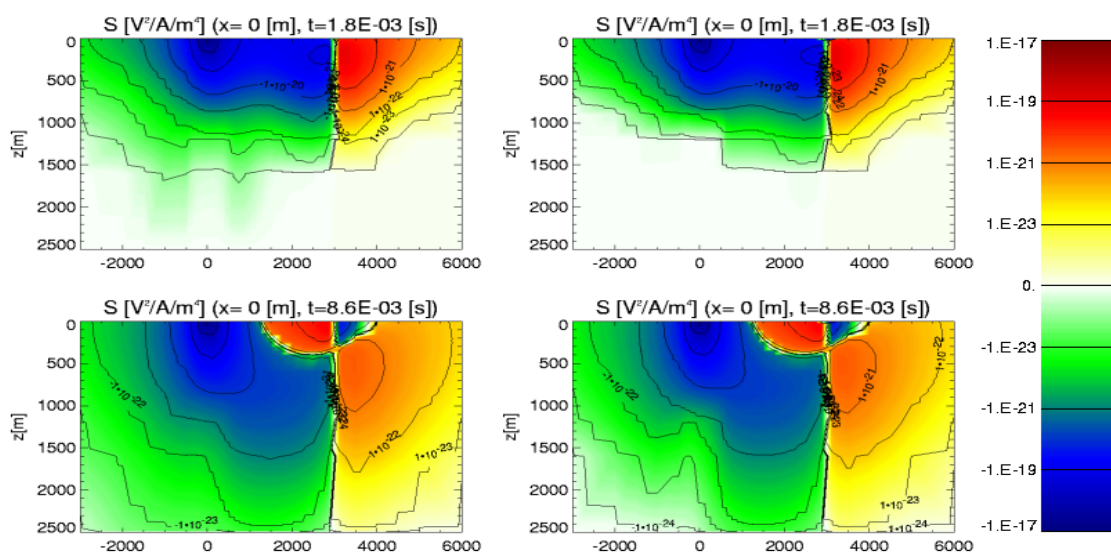


Abbildung 5: Vergleich zwischen Approximierten (links) und genauen Sensitivitätsdichten (rechts) eines H_z Empfängers. Gleiche y - z Ebene wie bei Abbildung 4.

6 Fazit

Die Sensitivitätsberechnung wurde mit der hier vorgestellten differentiellen Konvolutionsmethode durchgeführt. Der Vergleich mit der Perturbationsmethode zeigte eine gute Übereinstimmung, so dass die Methode als geeignet betrachtet werden kann. Ein wesentlicher Geschwindigkeitsvorteil gegenüber der bisherigen Konvolutionsmethode wurde durch die Konvolution logarithmisch äquidistanter Daten und durch die Approximation der Green'schen Funktion erreicht. Die hier gezeigten Approximierten Sensitivitäten sind wesentlich schneller zu berechnen als die genauen Sensitivitäten in mindestens zwei bis drei Größenordnungen, je nach Komplexität des Modellraums. Die Berechnungszeitdifferenz der Methoden wächst mit der Grösse des Problems, da $1D$ Lösungen linear von der Anzahl der benutzten Empfänger und der Gittergrösse des Modellraums abhängen. Die genauen Sensitivitäten hingegen hängen linear von der Anzahl der Empfänger und ungefähr quadratisch von der Gittergrösse ab.

Dass das $3D$ feature der Modellstudie sowohl in den E_x als auch in den H_z Sensitivitäten mit der Approximation deutlich zu sehen ist, gibt Grund zur Annahme, dass hiermit eine vollständige Jacobimatrix errechenbar ist, die genau genug ist um iteratives Inversionsverfahren konvergieren zu lassen. Dies wird aktuell in einen Inversionsalgorithmus implementiert.

Literatur

Anderson, W. L., Numerical integration of related Hankel transforms of orders 0 and 1 by adaptive digital filtering, *Geophysics*, 44, (7), 1287–1305, 1979.

Boerner, D. E. und G. F. West, A generalized representation of the electromagnetic fields in a layered earth, *Geophys. J.*, 1989.

Chave, A. D., The fréchet derivatives of electromagnetic induction, *J. Geophys. Res.*, 1984.

- deGroot Hedlin, C. und S. Constable**, Occam's inversion to generate smooth, two-dimensional models for magnetotelluric data, *Geophysics*, 1990.
- Dey, A. und S. H. Ward**, Inductive sounding of a layered earth with a horizontal magnetic dipole, 1970.
- Druskin, V. L. und L. A. Knizhnermann**, A spektral semi-discrete method for the numerical solution of 3d nonstationary problems in electrical prospecting, *Phys. Solid Earth*, 1988.
- Ellis, R., C. Farquharson und D. Oldenburg**, Approximate inverse mapping inversion of the coprod2 data, *J. Geomagn. Geoelectr.*, 1993.
- Farquharson, C. G. und D. W. Oldenburg**, Approximate sensitivities for the electromagnetic inverse problem, *Geophys. J. Int.*, 1996.
- Hohmann, G. W.**, *Electromagnetic methods in applied geophysics*, Kapitel Numerical Modeling for Electromagnetic Methods of Geophysics, Soc. Expl. Geophys., 1988.
- Hördt, A.**, Calculation of electromagnetic sensitivities in the time domain, *Geophys. J. Int.*, 1998.
- Kaufman, A. A. und G. V. Keller**, *Frequency and transient soundings*, Methods in Geochemistry and Geophysics, Bd. 16, Elsevier, 1983.
- McGillivray, P. und D. Oldenburg**, Methods for calculating fréchet derivatives and sensitivities for the non-linear inverse problem: a comparative study, *Geophys. Prospect.*, 1990.
- Newman, G. A., G. W. Hohmann und W. L. Anderson**, Transient electromagnetic response of a three-dimensional body in a layered earth, *Geophysics*, 51, (8), 1608–1627, 1986.
- Petrat, L.**, Zweidimensionale inversion von long offset transient electromagnetics-daten, Diplomarbeit, Universität zu Köln, Institut für Geophysik und Meteorologie, Januar 1996.
- Petry, H.**, Transient elektromagnetische Tiefensondierungen — Modellrechnungen und Inversion, Diplomarbeit, Universität zu Köln, Institut für Geophysik und Meteorologie, Oktober 1987.
- Press, W. H., S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling und B. P. Flannery**, *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, 1995.
- Rodi, W.**, A technique for improving the accuracy of finite element solutions for magnetotelluric data, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 1976.
- Sasaki, Y.**, Two dimensional joint inversion of magnetotelluric and dipole-dipole resistivity data, *Geophysics*, 1989.
- Schneider, T.**, Zeitlich optimierte sensitivitätsberechnung für "long-offset transient electromagnetics" LOTEM unter verwendung des reziprozitätsgesetz, Diplomarbeit, Universität zu Köln, Institut für Geophysik und Meteorologie, 2000.
- Smith, J. und J. Booker**, Rapid inversion of surface and borehole electromagnetic data for two-dimensional electrical conductivity models, *J. Geophys. Res.*, 1991.
- Strack, K. M.**, *Exploration with deep transient electromagnetics*, Methods in Geochemistry and Geophysics, Bd. 30, Elsevier, Amsterdam, 1992.
- Vozoff, K. und D. L. B. Jupp**, Joint inversion of geophysical data, 1975.
- Weidelt, P.**, Electromagnetic modeling of three-dimensional structures, *J. Geophys.*, 41, 85–109, 1975.
- Weidelt, P.**, Einführung in die elektromagnetische Tiefenforschung, Vorlesungsskript Technische Universität Braunschweig, 1986.