

FEM-Modellierung mit adaptiver Netzverfeinerung in der Gleichstromgeoelektrik

S. Friedel* und C. Rücker*

Zusammenfassung

Die Effizienz (Genauigkeit vs. Rechenzeit) von Algorithmen zur numerischen Modellierung von Feldproblemen ist u.a. abhängig von: der Approximation der Lösungsfunktion sowie ihrer partiellen Ableitungen, der Wahl der diskreten Stützstellen (Gitter) sowie dem Löser des daraus folgenden linearen Gleichungssystems.

Die Mehrzahl der Modellierungsalgorithmen in der Geoelektrik verwendet die Finite Differenzen Methode (FDM), weit seltener die Finite Element Methode (FEM) sowie meist empirisch vordefinierte und an den Koordinaten ausgerichtete Gitter. Effizienzsteigerung wurde in der Vergangenheit vornehmlich durch Verwendung spezieller Gleichungslöser angestrebt.

Geophysikalische elektromagnetische Feldprobleme weisen eine Reihe von Besonderheiten auf, für deren Behandlung die FEM wegen ihrer großen Flexibilität vorteilhaft erscheint, z.B. irregulär geformte Inhomogenitäten und Ränder des Untersuchungsgebiets (Topographie) sowie wahlfrei zu positionierende singuläre Quellterme.

In dieser Studie werden am Beispiel der 2-D DC-Geoelektrik Konzepte der adaptiven Netzgenerierung in der FEM vorgestellt sowie strukturierte und unstrukturierte, global und adaptiv verfeinerte Netze mit unterschiedlichen Funktionsapproximationen hinsichtlich ihrer Effizienz verglichen.

Es ergibt sich, daß unstrukturierte adaptiv verfeinerte Gitter deutlich weniger Knoten als strukturierte global verfeinerte, um den gleichen Grad an Genauigkeit zu erreichen. Der Gewinn an Genauigkeit ist in der Nähe von Singularitäten am größten. Ein entscheidender Gewinn an Genauigkeit im gesamten Lösungsgebiet ergibt sich dann, wenn adaptive Netze mit Ansatzfunktionen höherer Ordnung kombiniert werden. Der relative Zuwachs an Genauigkeit beim Übergang von bilinearen zu biquadratischen Ansatzfunktionen ist größer als beim weiteren Übergang zu bikubischen.

1 Einführung

Der Ansatz finiter Differenzen ist heute die am weitesten verbreitete Methode zur numerischen Lösung elektromagnetischer Vorwärtsaufgaben in der Geophysik. Ausgehend von klassischen Ansätzen (MUFTI, 1976; DEY & MORRISON, 1979) wurden die Algorithmen in den letzten Jahren durch die Verwendung schneller Gleichungslöser beschleunigt (ZHANG et al., 1995; SPITZER, 1995) und durch spezielle Ansätze in ihrer Genauigkeit verbessert (LOWRY et al., 1989; ZHAO & YEDLIN, 1996). Relativ unverändert blieb hingegen das Diskretisierungskonzept, welches eng an die verwendeten Raumkoordinaten gebunden ist und die Behandlung von Problemen mit komplizierterer Geometrie (Topographie) erschwert. Die verwendeten Gitter sind meist relativ einfach entlang der Raumkoordinaten strukturiert und weisen eine subjektiv vordefinierte Abnahme der Feinheit mit zunehmendem Abstand von den Meßsystemen auf.

Die Methode der finiten Elemente wird in der Geoelektrik einer weitaus geringeren Zahl von wissenschaftlichen Arbeiten und verfügbaren Algorithmen

verwendet (COGGON, 1971; PRIDMORE et al., 1981; QUERALT et al., 1991). Besonderes Augenmerk galt der Berücksichtigung topographischer Effekte (FOX et al., 1980; HOLCOMBE & JIRACEK, 1984). Allerdings wurde in vielen Ansätzen und kommerziellen Programmen die klassische Blockdiskretisierung der FDM übernommen, wodurch einige Aspekte der hohen Flexibilität der FEM ungenutzt blieben, die aber zunehmend ins Blickfeld geraten (BING & GREENHALGH, 2001).

Im Gegensatz dazu stellt in den Ingenieurwissenschaften die FEM heute nicht nur die dominierende Verfahren zur Lösung stationärer und instationärer Feldprobleme dar, sondern wurde in den letzten Jahren durch Impulse aus der Mathematik ständig weiterentwickelt (BEY, 1998; KOST, 1994). Die Gitter werden automatisch und problemspezifisch erstellt, und adaptiv verfeinert. Kompliziert berandete Objekte können dadurch besser approximiert werden, sowie Netze an großen Feldgradienten (z.B. an Materialkontrasten und an Singularitäten) verfeinert werden, um eine bessere Genauigkeit der Lösungen zu erhalten (Abb. 1).

Die vorliegende Arbeit beleuchtet einige Aspekte der FEM mit adaptiver Netzverfeinerung und untersucht wie diese zur Steigerung der Effizienz bei geoelektrischen Modellrechnungen eingesetzt werden kann.

*Universität Leipzig, Institut für Geophysik und Geologie, Talstraße 35, 04103 Leipzig, E-mail: friedel@physik.uni-leipzig.de, cruecker@rz.uni-leipzig.de

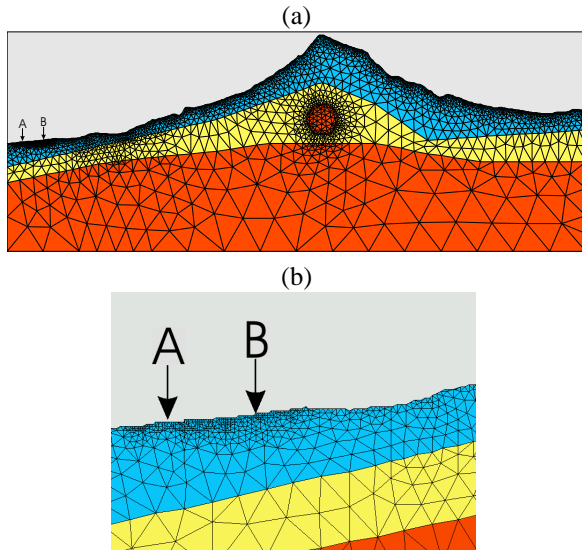


Abbildung 1: (a) Unstrukturierte adaptive Netze (hier Beispiel einer geoelektrischen Modellrechnung am Vulkan Merapi) gestatten eine realistische Nachbildung von Topographie sowie eine problembezogene Verfeinerung in Gebieten mit großen Materialkontrasten und (b) im Umfeld singularer Quellen.

2 Theorie der FEM

2.1 Vorwärtsproblem der Geoelektrik

Die Vorwärtsaufgabe der Gleichstromgeoelektrik wird durch die Poissongleichung beschrieben

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \varphi) + f = 0 \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^3 \quad (1)$$

wobei $\sigma(x, y, z)$ die gegebene Leitfähigkeit im Untergrund, $f = \nabla \cdot \mathbf{j}$ die Quellfunktion der angelegten Ströme und $\varphi(x, y, z)$ das gesuchte elektrische Potential darstellen. Die Bedingungen auf den Rändern Γ des Untersuchungsgebietes Ω können allgemein dargestellt werden als

$$\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \beta(\varphi - \varphi_0) = j_0 \quad \text{auf } \Gamma \quad (2)$$

Hier bezeichnet $\sigma \partial \varphi / \partial n$ die Normalkomponente der Stromdichte, die nach außen durch den Rand tritt. Durch geeignete Vorgabe des Potentials φ_0 , der Stromdichte j_0 und der Funktion β auf dem Rand können beliebige Randbedingungen vom Dirichlet-, Neumann- oder Cauchy-Typ berücksichtigt werden. In der Geoelektrik wird der Rand üblicherweise in zwei Teile gegliedert $\Gamma = \Gamma_s \cup \Gamma_e$. Auf der Erdoberfläche Γ_s werden homogene Neumann Bedingungen angenommen ($\varphi_0 = j_0 = \beta = 0$), während durch die Grenze des Modellierungsgebietes im Untergrund Γ_e ein gewisser Stromfluß zugelassen wird der implizit mit dem Randpotential verknüpft ist (homogene Cauchy Bedingungen, $\varphi_0 = j_0 = 0, \beta \neq 0$).

Das Augenmerk dieser Studie liegt vor allem den Netzen und Formfunktionen der FEM, daher betrach-

ten wir ein einfaches 2-D Problem, d.h. alle eingeführten Größen sind ausschließlich von den Raumkoordinaten x und z abhängig. Insbesondere gilt

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = I \delta(x - x_0) \delta(z - z_0)$$

(Linienelektroden). Die Behandlung realistischer Punktelektroden über 2-D Störkörpern führt erfahrungsgemäß zu zusätzlichen Approximationsfehlern (RÜCKER, 2000; KEMNA, 1995) und bleibt aus in dieser Arbeit unberücksichtigt.

2.2 Finite Elemente Formulierung

Zur Herleitung der finiten Element Formulierung des Randwertproblems (1)(2) verwenden wir die Methode der gewichteten Residuen. Gesucht wird eine Lösung φ im Sobolev Raum $H^1(\Omega)$ die für alle möglichen Wichtungsfunktionen aus $H^1(\Omega)$ folgende Gleichung erfüllt:

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot (\sigma \nabla \varphi) + f) w \, d\Omega \quad \forall w \in H^1(\Omega) \quad (3)$$

Die Elimination der zweiten partiellen Ableitung von φ durch Anwendung des Greenschen Theorems führt auf die schwache Formulierung des Randwertproblems

$$\int_{\Omega} \sigma \nabla \varphi \cdot \nabla w \, d\Omega - \int_{\Omega} f w \, d\Omega - \int_{\Gamma} \sigma w \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, d\Gamma = 0 \quad \forall w \in H^1(\Omega) \quad (4)$$

Wir benutzen die Galerkin Methode zur Berechnung einer Approximation für das Potential $\varphi_l = \varphi(x_l, z_l)$ an diskreten Knotenpunkten (x_l, z_l) , $l = 1 \dots N_n$. Zu diesem Zweck wird das Gebiet in Teilgebiete $\Omega^{(i)}$ (die finite Elemente) und der Rand in entsprechende Randstücke $\Gamma^{(i)}$ diskretisiert, so daß gilt

$$\Omega \rightarrow \bigcup_{i=1}^{N_e} \Omega^{(i)} \quad \text{and} \quad \Gamma \rightarrow \bigcup_{i=1}^{N_b} \Gamma_i$$

Hierbei bezeichnen N_n, N_e und N_b die Zahl der Knoten, Elemente und Randelemente. Für das Potential φ benutzen wir den Ansatz

$$\varphi = \alpha_0 + \sum_{l=1}^{N_n} \varphi_l \alpha_l \quad (5)$$

wobei φ_l die unbekanntenen Knotenpotentiale darstellen und $\alpha_l(x, z)$ eine komplette Basis von Formfunktionen auf den Knoten bilden. Für die Formfunktionen sollen folgende Randbedingungen gelten:

$$\begin{aligned} \sigma \frac{\partial \alpha_0}{\partial n} + \beta(\alpha_0 - \varphi_0) &= j_0 \quad \text{auf } \Gamma \\ \sigma \frac{\partial \alpha_l}{\partial n} + \beta \alpha_l &= 0 \quad \text{auf } \Gamma \end{aligned} \quad (6)$$

In der Galerkin-Methode werden die gleichen Funktionen gleichzeitig als Menge der Wichtungsfunktionen

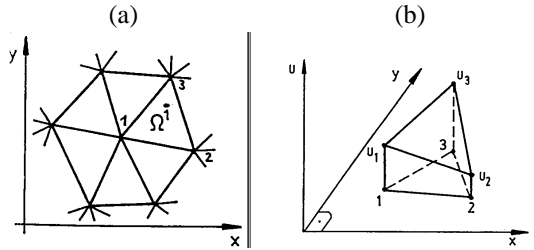


Abbildung 2: (a) Diskretisierung des Untersuchungsgebietes in finite Elemente (b) Beispiel für einen bilinearen Funktionsansatz zur Approximation der Funktion auf dem Element (aus KOST, 1994).

benutzt: $\forall w \rightarrow \forall \alpha_m, m = 1 \dots N_n$. Durch Einsetzen von (5) in (4) erhält man die N_n Gleichungen zur Bestimmung der unbekanntenen Koeffizienten:

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^{N_n} \varphi_l \left(\int_{\Omega} \sigma \nabla \alpha_l \cdot \nabla \alpha_m \, d\Omega + \int_{\Gamma} \beta \alpha_l \alpha_m \, d\Gamma \right) \\ &= \int_{\Omega} (f \alpha_m - \sigma \nabla \alpha_0 \cdot \nabla \alpha_m) \, d\Omega \\ & - \int_{\Gamma} (\beta (\alpha_0 - \varphi_0) - j_0) \alpha_m \, d\Gamma . \end{aligned} \quad (7)$$

Die Integration erfolgt über die finiten Elemente und Randelemente und man erhält ein symmetrisches Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \mathbf{S}\varphi &= \mathbf{v} \quad \text{mit} \\ S_{ml} &= \sum_{i=1}^{N_e} \int_{\Omega^{(i)}} \sigma \nabla \alpha_l \cdot \nabla \alpha_m \, d\Omega \\ & + \sum_{i=1}^{N_b} \int_{\Gamma^{(i)}} \beta \alpha_l \alpha_m \, d\Gamma \quad \text{und} \\ v_m &= \sum_{i=1}^{N_e} \int_{\Omega^{(i)}} (f \alpha_m - \sigma \nabla \alpha_0 \cdot \nabla \alpha_m) \, d\Omega \\ & + \sum_{i=1}^{N_b} \int_{\Gamma^{(i)}} (\beta (\alpha_0 - \varphi_0) - j_0) \alpha_m \, d\Gamma . \end{aligned} \quad (8)$$

Werden auf keinem Randelement Ströme oder Potentiale festgehalten (wie im Fall homogener Cauchy-Randbedingungen), entfallen im Lastvektor alle Terme in denen α_0, φ_0 und j_0 vorkommen.

Zur numerischen Implementation dieses Gleichungssystems benötigt man nunmehr noch Aussagen über die Formfunktionen α . Sie beschreiben, wie die gesuchte Funktion auf jedem einzelnen Element approximiert wird. Im einfachsten Fall wählt man einen bilinearen Ansatz (Abb. 2b), d.h. der Funktionsverlauf im Element i ist gegeben durch

$$\varphi^{(i)}(x, y) = d_1^{(i)} + d_2^{(i)} x + d_3^{(i)} y . \quad (10)$$

Höhere Polynomansätze (biquadratisch, bikubisch, etc.) sind ebenfalls möglich erfordern jedoch zusätzliche Knotenpunkte auf den Elementen. In jedem Fall

ergeben sich aus den Integrationen in (8) und (9) Koeffizienten als Funktionen der Ortskoordinaten der Gitterpunkte. Ein Beispiel für einen bilinearen Ansatz auf dreieckigen Elementen findet sich im Anhang für höhere Ansätze sei auf die Literatur verwiesen (KOST, 1994; SCHWARZ, 1991)

3 Adaptive Netze

3.1 Grundkonzept

Das Grundkonzept der adaptiven Netzgenerierung besteht darin, die gesuchte Funktion nicht auf einem vordefinierten Satz von Gitterpunkten zu approximieren, sondern das Gitter so anzupassen, daß ein bestmöglicher Kompromiß zwischen der geforderten Genauigkeit der Lösung und der Anzahl der Knoten und damit der Rechenzeit gefunden wird. Die Dichte der Netzknoten sollte in jedem Gebiet in Abhängigkeit von der Komplexität der Lösung gewählt werden: niedrig bei glattem Funktionsverlauf und hoch bei starken Gradienten.

Adaptive Netzverfeinerung wird gewöhnlich in einem iterativen Prozeß erzielt, der schematisch in Abb. 3 dargestellt ist. In einem ersten Schritt wird ein einfaches Startgitter bereitgestellt. Es umfaßt die Geometrie des Gebietes, vordefinierte unveränderliche Inhomogenitäten sowie Knoten an den Elektrodenpositionen. Auf diesem Gitter wird das Vorwärtsproblem erstmals gelöst. Anschließend wird die Qualität der Lösung mit einem a posteriori Fehlerschätzer bewertet. Er mißt die Genauigkeit der Lösung in allen Teilgebieten und ermittelt einen gewissen Prozentsatz (etwa 10-25 %) der schlechtesten Elemente, die verfeinert werden sollten. Diese Elemente werden nun mit einem Verfeinerungsalgorithmus behandelt der seinerseits aus verschiedenen Schritten besteht (Abb. 4). Anschließend wird eine neuerliche Vorwärtsrechnung auf dem verfeinerten Netz vorgenommen.

Die Abfolge von Fehlerschätzung, Verfeinerung und Vorwärtsrechnung wird iterativ so lange wiederholt, bis der Gesamtfehler der Lösung der geforderten Genauigkeit entspricht. Ein einzelner Verfeinerungsschritt wird an einem Beispiel in Abb. 5 illustriert.

3.2 A posteriori Fehlerschätzer

Zu den Grundkomponenten der adaptiven Netzverfeinerung gehört ein a posteriori Fehlerschätzer, der die lokale Genauigkeit der Lösung (wohlgermerkt nicht in Bezug auf eine bekannte Lösung) bewertet. Hierzu wurden in den letzten Jahren verschieden Algorithmen untersucht (VERFÜHRT, 1993), wobei u.a. lokale Normen für folgende Diskrepanzen herangezogen werden können:

- die Residuen in Bezug auf die starke Formulierung der partiellen Differentialgleichung (BABUŠKA & RHEINBOLDT, 1978)

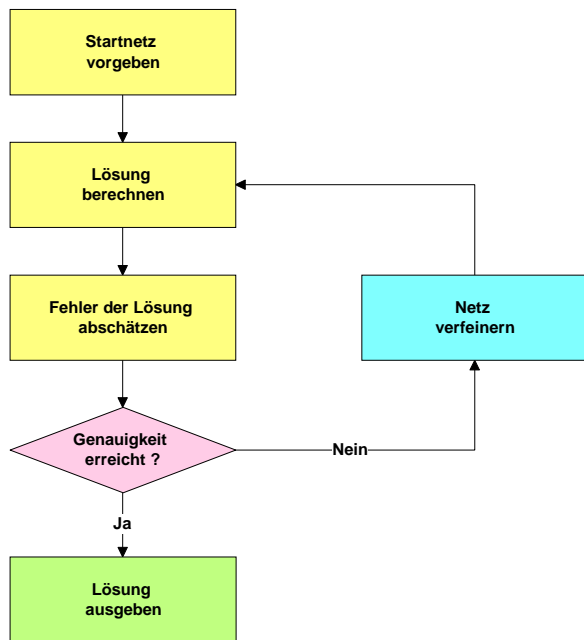


Abbildung 3: Schematischer Ablaufplan eines Algorithmus zur Adaptiven Netzgenerierung.

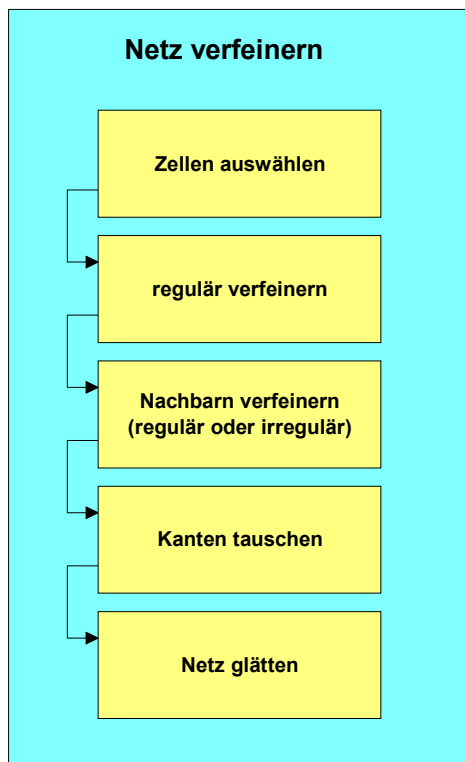


Abbildung 4: Schematischer Ablaufplan eines einzelnen Schritts zu Verbesserung der Qualität eines Netzes

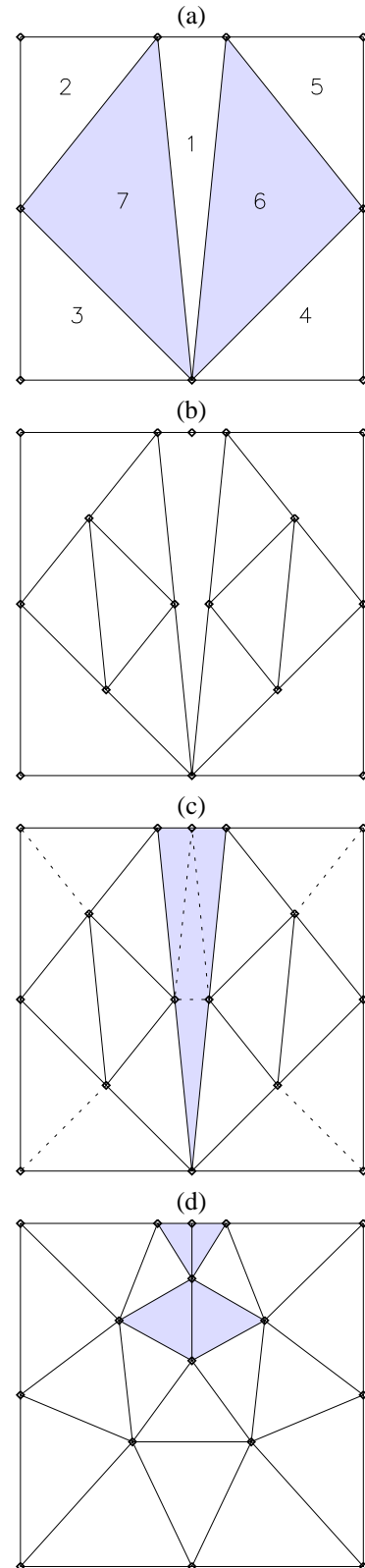


Abbildung 5: Ein einzelner Schritt zur Netzverfeinerung: (a) Auswahl der zu verfeinernden Zellen durch den Fehlerschätzer, (b) reguläre Verfeinerung der Zellen 6 und 7 (c) notwendige Verfeinerung der Nachbarzellen regulär (1) und irregulär (2,3,4 und 5), (d) endgültiges Netz nach *edge swapping* und Glättung.

- die Differenz zwischen Lösung und lokaler Lösung eines verkleinerten Problems
BANK & WEISER (1985)
- die Differenz zwischen der Lösung und einer lokalen Extrapolation aus den Nachbarelementen
(ZIENKIEWICZ & ZHOU, 1987)
- die Differenz zwischen der aktuellen Lösung und Lösungen auf feineren bzw. groberen Netzen
DEUFLHARD et al. (1989); ZIENKIEWICZ & TAYLOR (1991)

3.3 Netzverfeinerung

Die Abbildungen 4 und 5 illustrieren die prinzipielle Vorgehensweise in einem einzelnen Verfeinerungsschritt. Die durch den Fehlerschätzer bestimmten Elemente werden zunächst, regulär verfeinert, d.h. im Falle von Dreieckselementen entstehen durch Bisektion der Kanten aus einem Dreieck vier kleinere. Auf einigen Kanten entstehen durch die Bisektion freie (sog. hängende) Knoten, die zu einer Überbestimmtheit der Koeffizientenmatrix führen. Um eine gültige Triangulation zu erhalten werden alle Dreiecke mit zwei hängenden Knoten in vier Dreiecke (regulär), Zellen mit nur einem hängenden Knoten in zwei Dreiecke (irregulär) unterteilt.

In zwei weiteren optionalen Schritten kann nunmehr die Qualität des Netzes verbessert werden. Weisen die neu entstandenen Elemente sehr spitze Winkel auf, so erhöht sich die Konditionszahl des resultierenden Gleichungssystems. Durch Tausch von Kanten kann man dem entgegenwirken. Nach dem Babuška-Kriterium werden zwei benachbarte Dreiecke als Viereck betrachtet und so in zwei Dreiecke geteilt, daß der größte in beiden Dreiecken auftretende Winkel minimiert wird. Dabei wird entweder die teilende diagonale Kante beibehalten oder getauscht (*edge swapping*.) Eine weitere Verbesserung der Netzqualität wird durch Glättung erzielt, z.B. durch die Verschiebung aller nicht fixierten Knoten in den geometrischen Schwerpunkt ihrer Nachbarknoten (Laplace Methode).

4 Numerische Ergebnisse

Die Effizienz eines Modellierungsalgorithmus läßt sich nach dem Verhältnis der Lösungsgenauigkeit zur Rechenzeit bewerten und wird u.a. von folgenden Faktoren geprägt: a) dem Netz bzw. Netzgenerator, b) dem Funktionsansatz auf dem Netz und c) dem Gleichungslöser. Da Gleichungslöser für dünn besetzte symmetrische Matrizen wurden in der Vergangenheit in verschiedenen Arbeiten zur FD Modellierung eingehend untersucht wurden, galt unsere Aufmerksamkeit im folgenden numerischen Experiment den beiden ersten Faktoren.

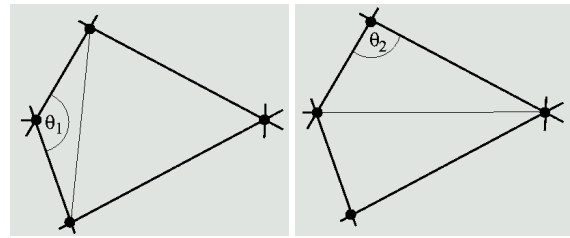


Abbildung 6: Durch Kantentausch (*edge swapping*) können spitze Winkel in Elementen vermieden und die Konditionszahl des Gleichungssystems verbessert werden. Je zwei Dreiecke werden als Viereck betrachtet. Die sie teilende Diagonalkante wird getauscht, wenn dadurch der maximal auftretende Winkel verkleinert wird (Babuška Kriterium).

Um zusätzliche numerische Fehlerquellen bei der Berücksichtigung von Punktelektroden (Fourier-Transformationen, Wahl der Stützstellen) zu vermeiden, wurde ein reines 2-D Problem betrachtet - eine Dipol-Dipol-Sondierung über einem homogenen Halbraum mit 25 Elektroden im Einheitsabstand (1 m) auf einem linearen Profil. Die Stromspeisung erfolgte an den Elektroden 1 ($x = 0$) und 2, zwischen je zwei benachbarten Elektroden 3 bis 25 wurde eine Meßspannung u_i berechnet. Verglichen wurde der relative Fehler der numerischen Lösung

$$e_i = |(u_i^{num} - u_i^{ana})/u_i^{ana}|$$

sowie die Größe des FE Gleichungssystems (Knoten-zahl). Das numerische Untersuchungsgebiet erstreckte sich in x -Richtung jeweils um 2 m über das Elektrodenarray hinaus (-2,26) und von der Erdoberfläche bis in 10 m Tiefe. An der Oberfläche wurden homogene Neumann-Randbedingungen gewählt, die Ränder im Untergrund wurden mit dem analytischen Potential belegt.

Die verschiedenen verwendeten Diskretisierungsnetze sind in Abbildung 7 dargestellt: ein strukturiertes Starnetz (R-1) mit zwei globalen Verfeinerungen (R-1 und R-2) und einer adaptiven Verfeinerung (R-A1) sowie ein unstrukturiertes Starnetz (G-1) mit zwei globalen Verfeinerungen (G-2) und (G-3) sowie einer adaptiven Verfeinerung (G-A1). Auf den strukturierten Netzen R-1 bis R-3 wurde durchweg ein bilinearer Funktionsansatz gewählt, während auf den unstrukturierten Gittern zusätzlich mit biquadratischen und bikubischen Ansätzen gerechnet wurden.

Die Ergebnisse der Modellrechnungen sind in den Abbildungen 8 a) bis c) dargestellt. Für das einfachste strukturierte Netz ohne Stützstellen zwischen den Elektroden ergibt sich für den ersten Spannungsdipol ein Modellierungsfehler von knapp 10 %. Mit steigender Entfernung von den Singularitäten nimmt der Fehler zunächst stark ab um im letzten Drittel wieder etwas zu steigen, was vermutlich durch die spezielle anisotrope Netzstruktur verursacht wird.

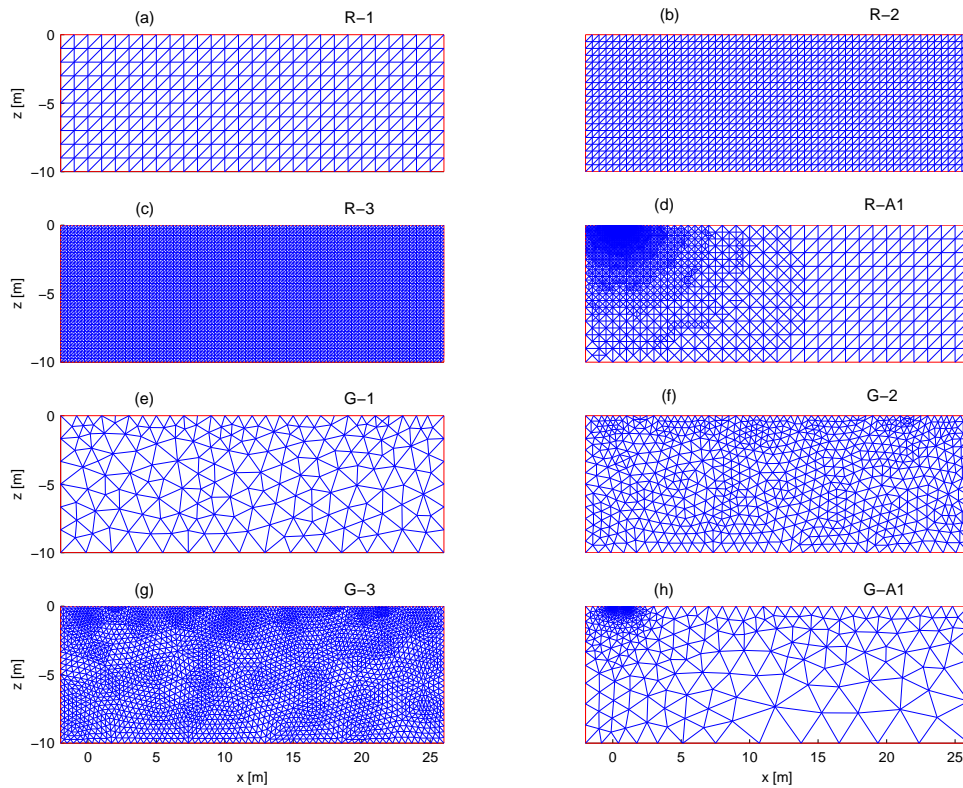


Abbildung 7: Verschiedene Netze: Strukturiertes Starnetz (a) mit zwei globalen Verfeinerungen (b) und (c) und einer adaptiven Verfeinerung (d) sowie ein unstrukturiertes Startnetz (e) mit zwei globalen Verfeinerungen (f) und (g) und einer adaptiven Verfeinerung (h).

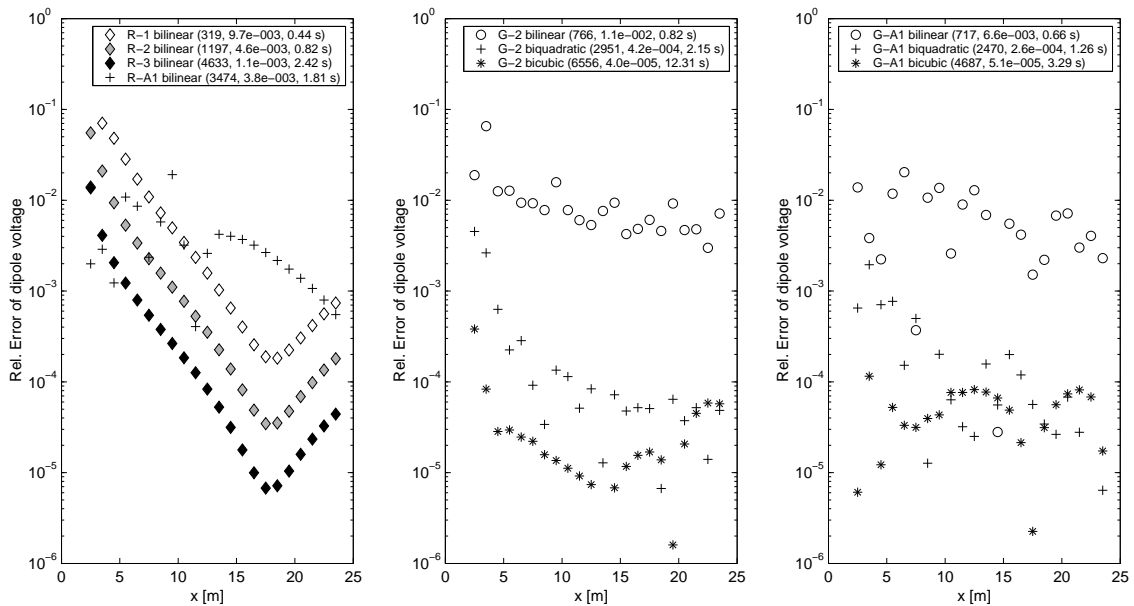


Abbildung 8: Relative Genauigkeit einer numerisch mit verschiedenen Netzen berechneten Dipol-Dipol-Sondierung im Vergleich zur analytischen Lösung. Die Stromelektroden befanden sich bei $x = 0$ und $x = 1$ die Potentialsonden bei $x = 2 \dots x = 24$. Die Werte sind jeweils über dem Mittelpunkt des Spannungsdipols aufgetragen.

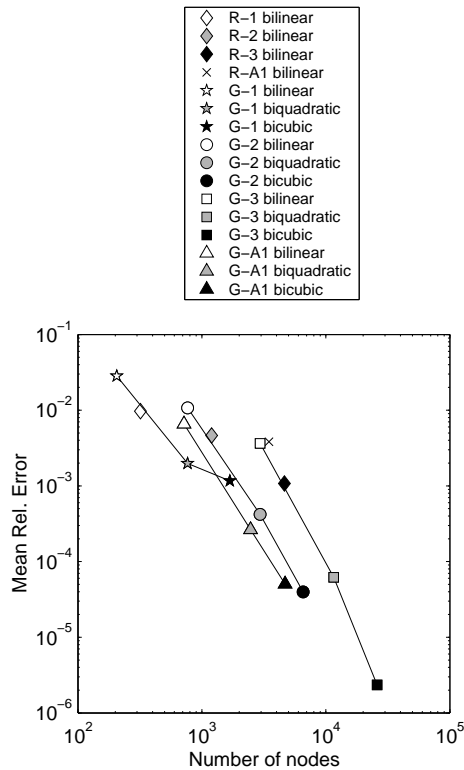


Abbildung 9: Performance verschiedener Netze ausgedrückt durch mittlerer relativer Genauigkeit als Funktion der Knotenzahl.

Der mittlere Fehler nimmt zwar bei globaler Netzverfeinerung erwartungsgemäß ab, bleibt aber im Bereich der Singularitäten selbst bei über 4600 Knoten deutlich über einem Prozent. Das adaptiv verfeinerte Startnetz zeigt bei einer geringeren Knotenzahl im Bereich der Singularitäten eine höhere Genauigkeit, bleibt aber in der mittleren Genauigkeit hinter dem Netz R-3 zurück.

Die unstrukturierten Dreiecksgitter zeigen meist eine geringere Abnahme des Fehlers mit wachsendem Abstand von der Singularität. Bei einem linearen Funktionsansatz bleibt das Gitter G-2 trotz einer mehr als doppelt so großen Anzahl von Knoten zunächst hinter dem Netz R-1 zurück. Bei einem biquadratischen Ansatz erreicht es jedoch eine Genauigkeit, die von keinem der strukturierten Netze erzielt wurde.

Das adaptiv verfeinerte unstrukturierte Gitter erbringt erwartungsgemäß in der Nähe der Singularitäten eine erhebliche Verbesserung der Genauigkeit und bleibt bei gleicher Knotenzahl dem global verfeinerten unstrukturierten Netz im mittleren Fehler überlegen.

5 Diskussion

Aus Abbildung 9, die die Ergebnisse aller Netze in einer doppelt logarithmischen Darstellung der Genauigkeit über der Knotenzahl zusammenfaßt lassen sich folgende Aussagen ableiten: Eine globale Verfeinerung

sowohl strukturierter als auch unstrukturierter Startnetze erwies sich als vergleichsweise ineffiziente Variante zur Verbesserung der Genauigkeit für die gesamte Sondierung. Obgleich eine bessere Genauigkeit an den Quellen erzielt wurde, ist eine adaptive Verfeinerung eines strukturierten Startnetzes ebenfalls global gesehen sehr ineffizient, was vermutlich durch die besondere Netzstruktur hervorgerufen wurde.

Bei unstrukturierten Gittern hingegen war die adaptive Verfeinerung der globalen auch im mittleren Fehler überlegen. Als besonders effiziente Variante, bei relativ geringer Zunahme der Knotenzahl einen hohen Gewinn an Genauigkeit zu erlangen, erwies sich die Verwendung von Formfunktionen höherer Ordnung. Der Übergang zu biquadratischen Ansätzen erbrachte dabei einen größeren absoluten Gewinn an Genauigkeit als der weitere Übergang zu bikubischen Formfunktionen.

Es muß darauf hingewiesen werden, daß die Aussagekraft des mittleren Fehlers, die diesen Überlegungen zugrunde liegt, begrenzt ist, da die relativen Fehler besonders in Elektrodennähe über Größenordnungen schwanken. Des weiteren bestimmt die angegebene Knotenzahl nur die Zeit die zum Lösen des Gleichungssystems benötigt wird. Unberücksichtigt blieb die Zeit zur Erstellung des adaptiven Gitters, die jedoch vernachlässigbar wird, wenn viele Elektrodenkonfigurationen auf einem Gitter gerechnet werden.

Insgesamt erscheint die weitere Untersuchung adaptiver Netze für elektromagnetische Vorwärtsprobleme in der Geophysik als äußerst sinnvolle Ergänzung zum Einsatz schneller Gleichungslöser.

Literatur

- BABUŠKA, I. & RHEINBOLDT, W. C. (1978): Error estimates for adaptive finite elements computations. *SIAM J. Num. Anal.*, 15(4), 736–754.
- BANK, R. E. & WEISER, A. (1985): Some a posteriori error estimator for elliptic partial differential equations. *Mathematics of Computation*, 44(170), 283–301.
- BEY, J. (1998): Finite-Volumen- und Mehrgitterverfahren ü elliptische Randwertprobleme. B.G.Teubner Stuttgart-Leipzig.
- BING, Z. & GREENHALGH, S. A. (2001): Finite element three-dimensional direct current resistivity modelling: accuracy and efficiency considerations. *Geophysics Journal International*, 145, 679–688.
- COGGON, J. H. (1971): Electromagnetic and electrical modeling by the finite element method. *Geophysics*, 36, 132–155.
- DEUFLHARD, P., LEINEN, P. & YSERENTANT, H. (1989): Concepts of an adaptive hierarchical finite element code. *IMPACT Comp. Sci. Eng.*, 1, 3–35.

- DEY, A. & MORRISON, H. F. (1979): Resistivity modeling for arbitrarily shaped three-dimensional structures. *Geophysics*, 44, 753–780.
- FOX, R. C., HOHMANN, G. W., KILLPACK, T. J. & RIJO, L. (1980): Topographic effects in resistivity and induced-polarization surveys. *Geophysics*, 45, 75–93.
- HOLCOMBE, H. T. & JIRACEK, G. R. (1984): Three-dimensional terrain corrections in resistivity surveys. *Geophysics*, 49, 439–452.
- KEMNA, A. (1995): Tomographische Inversion des spezifischen Widerstandes in der Geoelektrik. Diplomarbeit, Universität Köln.
- KOST, A. (1994): Numerische Methoden in der Berechnung elektromagnetischer Felder. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag.
- LOWRY, T., ALLEN, M. B. & SHIVE, P. N. (1989): Singularity removal: a refinement of resistivity modeling techniques. *Geophysics*, 54, 766–774.
- MUFTI, I. R. (1976): Finite difference resistivity modeling for arbitrary shaped two-dimensional structures. *Geophysics*, 41, 62–78.
- PRIDMORE, D. F., HOHMANN, G. W., WARD, S. H. & SILL, W. R. (1981): An investigation of finite-element modelling for electrical and electromagnetic data in three dimensions. *Geophysics*, 46, 1009–1024.
- QUERALT, P., POUS, J. & MARCUELLO, A. (1991): 2-d resistivity modelling: An approach to arrays parallel to the strike direction. *Geophysics*, 56, 941–950.
- RÜCKER, C. (2000): Die Methode der Finiten Elemente mit adaptiver Gittererzeugung und Integration eines Mehrgitterverfahrens zum Lösen des gleichstromgeoelektrischen Vorwärtsproblems. Diplomarbeit, Universität Leipzig, Institut für Geophysik und Geologie.
- SCHWARZ, H. R. (1991): Methode der finiten Elemente. B.G. Teubner, Stuttgart.
- SPITZER, K. (1995): A 3-D finite-difference algorithm for DC resistivity modelling using conjugate gradient method. *Geophys. J. Int.*, 123, 903–914.
- VERFÜHRT, R. (1993): A review of a posteriori error estimator and adaptive mesh refinement. Tech. rep., Institut für Angewandte Mathematik, Universität Zürich.
- ZHANG, J., MACKIE, R. & MADDEN, T. (1995): 3-D resistivity forward modelling and inversion using conjugate gradients. *Geophysics*, 60, 1313–1325.

ZHAO, S. & YEDLIN, M. (1996): Some refinements on the finite-difference method for 3-D DC resistivity modelling. *Geophysics*, 61, 1301–1307.

ZIENKIEWICZ, O. C. & TAYLOR, R. L. (1991): *The Finite Element Method*. McGraw-Hill, London.

ZIENKIEWICZ, O. C. & ZHOU, J. Z. (1987): A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24, 337–357.

A Formfunktionen bei bilinearem Ansatz

Die Koeffizienten der Systemmatrix (8) und des Lastvektors (9) sind Funktionen der Ortskoordinaten der Knotenpunkte eines jeden Elements und hängen vom gewählten Funktionsansatz auf den Elementen ab. Wir leiten hier Ausdrücke für die Formfunktionen, ihre Gradienten und die entsprechenden Integralausdrücke für den Spezialfall ab, daß die gesuchte Funktion auf jedem Dreieckselement durch einen bilinearen Ansatz approximiert wird:

$$\varphi^{(i)}(x, y) = d_1^{(i)} + d_2^{(i)}x + d_3^{(i)}y. \quad (11)$$

Alle folgenden Ausdrücke beziehen sich auf das Element i mit den Knoten 1, 2, und 3 wobei der obere Index weggelassen wird. Wendet man die Approximation auf die Werte in den Knoten selbst an

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

können die Koeffizienten ausgedrückt werden durch

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & a_1 \\ b_2 & b_2 & b_2 \\ c_3 & c_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

wobei A die Fläche des Dreiecks ist. Einsetzen von (13) in (11) liefert

$$\varphi(x, z) = \sum_{l=1}^3 \varphi_l \alpha_l(x, z) \quad (14)$$

mit folgender Definition der Formfunktionen:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1(x, z) \\ \alpha_2(x, z) \\ \alpha_3(x, z) \end{pmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Die Integration über die Elemente läßt sich im allgemeinen leichter bewerkstelligen indem die lokalen Basisfunktionen als Polynome der baryzentrischen Koordinaten ξ , η und ζ jedes Elements ausgedrückt werden. Für bilineare Ansätze auf Dreieckselementen sind die

Formfunktionen mit den baryzentrischen Koordinaten identisch

$$\begin{aligned}\alpha_1(\xi, \eta, \zeta) &= \xi \\ \alpha_2(\xi, \eta, \zeta) &= \eta \\ \alpha_3(\xi, \eta, \zeta) &= \zeta = 1 - \xi - \eta .\end{aligned}\quad (16)$$

Für die Integration der Polynome in baryzentrischen Koordinaten existieren die folgenden allgemeinen Formeln:

$$\int_{\Omega} \xi^q \eta^r \zeta^s \, d\Omega = 2A \frac{q!r!s!}{(q+r+s+2)!} \quad (17)$$

$$\int_{\Gamma} \xi^q \eta^r \, d\Gamma = 2L \frac{q!r!}{(q+r+1)!} , \quad (18)$$

wobei L die Länge des entsprechenden Randelements ist. Man erhält schließlich die folgenden Ausdrücke für die Integrale in (8)

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^{(i)}} \nabla \alpha_l \cdot \nabla \alpha_m \, d\Omega &= \left(\frac{b_l b_m - c_l c_m}{4A^{(i)}} \right) f_{ilm} \\ \int_{\Omega^{(i)}} \alpha_l \alpha_m \, d\Omega &= \frac{1}{12} \left(A^{(i)} + A^{(i)} \delta_{lm} \right) f_{ilm} \\ \int_{\Gamma^{(i)}} \alpha_l \alpha_m \, d\Gamma &= \frac{1}{6} \left(L^{(i)} + L^{(i)} \delta_{lm} \right) f_{ilm}\end{aligned}\quad (19)$$

wobei δ_{lm} das Kroneckersymbol bezeichnet und

$$f_{ilm} = \begin{cases} 1 & l \text{ und } m \text{ sind Knoten von } \Omega^{(i)} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für den Lastvektor ergibt sich

$$\sum_{i=1}^{N_e} \int_{\Omega^{(i)}} \alpha_m I \delta(x - x_l) \delta(z - z_l) \, d\Omega = I \delta_{lm} . \quad (20)$$